Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
16. Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 12

Oppgave 12.1 Undersøk om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^{2x}-1} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsning Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 0$ dersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1} = f(0) = 1.$$

Da $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ og $\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1) = 0$, er $\lim_{x\to 0} \sin x/(e^{2x}-1)$ av ubestemt form "0/0". Vi bruker derfor l'Hôspitals regel, og deriverer teller og nevner hver for seg. Dette gir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

Dermed er $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2 \neq f(0)$, og f er ikke kontinuerlig i $x = 0$

Oppgave 12.2 En sfærisk ballong fylles med en rate av 400 kubikkcentimeter per sekund. Med hvilken rate vokser radius til ballongen når overflatearealet er 200 cm^2? (Volum av sfære med radius r er $4\pi r^3/3$, overflateareal er $4\pi r^2$).

Løsning Ballongens volum er $V(r) = 4\pi r^3/3$. Overflatearealet til ballongen er $O(r) = 4\pi r^2$. Vi har oppgitt at $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = 400\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Ved bruk av kjerneregelen finner vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \ .$$

Dermed er

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{O(r)} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \ .$$

I det øyeblikk $O = 200\ \mathrm{cm}^2$, har vi at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{200\ \mathrm{cm}^2} \cdot 400\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = 2\ \mathrm{cm/s} \ .$$

Altså øker radiusen til ballongen med 2 cm/s i dette øyeblikket.