Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
16. Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 10

Oppgave 10.1 Undersøk om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} & \text{for } x \neq 0 \\ 2 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsning Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 0$ dersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = f(0) = 2.$$

Da $\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1) = 0$ og $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, er $\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1)/\sin x$ av ubestemt form "0/0". Vi bruker derfor l'Hôspitals regel, og deriverer teller og nevner hver for seg. Dette gir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = 2.$$

Dermed er $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$, og f er kontinuerlig i $x = 0$

Oppgave 10.2 En sfærisk ballong fylles med en rate av 200 kubikkcentimeter per sekund. Med hvilken rate vokser overflatearealet til ballongen når volumet er 100 cm^3? (Volum av sfære med radius r er $4\pi r^3/3$, overflateareal er $4\pi r^2$).

Løsning Ballongens volum er $V(r) = 4\pi r^3/3$. Overflatearealet til ballongen er $O(r) = 4\pi r^2$. Vi har oppgitt at $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = 200\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Ved bruk av kjerneregelen finner vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \ .$$

Dermed er

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \ .$$

Vi skal finne $\mathrm{d}O/\mathrm{d}t$. Vi bruker derfor kjerneregelen på $O(r)$ og finner at

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 8\pi r \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{8\pi r}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \ .$$

I det øyeblikk $V = 100\ \mathrm{cm}^3$, er radiusen til ballongen

$$r = \left(\frac{3 \cdot 100\ \mathrm{cm}^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{75}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{cm}.$$

Dermed er

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\left(\frac{75}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{cm}} \cdot 200\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = 400 \cdot \left(\frac{\pi}{75}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{cm}^2/\mathrm{s} \approx 138{,}92\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s} \ .$$

Altså øker overflatearealet til ballongen med ca. $139\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ i dette øyeblikket.