



Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 1

Oppgave 01.1 Finn grensene $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2/x} - 1)x$ og $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2(\sin x)^2}$.

Løsning Da $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2/x} - 1) = 0$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ er $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2/x} - 1)x$ ubestemt av typen “ $0 \cdot \infty$ ”. Vi forsøker derfor med L’Hôpitals regel:

Da $e^{2/x} - 1$ og x begge er deriverbare, og

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{2/x} - 1)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{x^2} e^{2/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{2/x} = 2$$

følger det av L’Hôpitals regel at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2/x} - 1)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{2/x} - 1)}{\frac{d}{dx} \frac{1}{x}} = 2.$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x - 1 = 0$ og $\lim_{x \rightarrow 0} 2(\sin x)^2 = 0$ er $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2(\sin x)^2}$ ubestemt av typen “ $0/0$ ”. Vi forsøker derfor med L’Hôpitals regel:

Da $\cos x - 1$ og $2(\sin x)^2$ begge er deriverbare, og

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx} 2(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{4 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cos x} = \frac{-1}{4}$$

følger det av L’Hôpitals regel at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx} 2(\sin x)^2} = \frac{-1}{4}.$$

Oppgave 01.2 Begrunn at ligningen $x + 2 \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$. Finn løsningen med 3 desimalers nøyaktighet ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 0.5$.

Løsning Da funksjonen $f(x) = x + 2 \sin x$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og $x + 2 \sin x|_{x=0} = 0 < 1$ og $x + 2 \sin x|_{x=1} = 1 + 2 \sin 1 > 1$, følger det av skjæringssetningen at det finnes minst en $c \in (0, 1)$ slik at $c + 2 \sin c = 1$. Da $\frac{d}{dx}(x + 2 \sin x) = 1 + 2 \cos x > 0$ for alle $x \in (0, 1)$, følger det at funksjonen $f(x) = x + 2 \sin x$ er strengt voksende på intervallet $[0, 1]$, og det finnes derfor høyst en $c \in (0, 1)$ slik at $c + 2 \sin c = 1$. Dermed har vi begrunnet at ligningen $x + 2 \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$.

Vi setter opp Newtons metode. La $g(x) = x + 2 \sin x - 1$. Da skal vi finne et nullpunkt til g . Vi lar derfor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + 2 \sin x_n - 1}{1 + 2 \cos x_n} = \frac{2x_n \cos x_n - 2 \sin x_n + 1}{1 + 2 \cos x_n}.$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi $x_1 = 0.3334578668$, $x_2 = 0.3375817693$ og $x_3 = 0.3375837050$. Her har de fem første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0.338$.