Oppgave 9.3.28

Vi er gitt rekken

$S := Sum(a(k), k = 1 ..infinity)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \tag{1}$$

Der vi har koeffisientene

$a := k \rightarrow \frac{1}{k^3}$

$$k \rightarrow \frac{1}{k^3} \tag{2}$$

Vi skal finne det *minste* intervallet slik at summen *S* er inneholdt i intervallet, ved å bruke integralapproksimasjon.

Vi definerer først

$A_n = int(a(x), x = n ..infinity)$ assuming $n > 1$

$$\frac{1}{2\,n^2} \tag{3}$$

$A_{n+1} = int(a(x), x = n + 1 ..infinity)$ assuming $n > 1$

$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} \tag{4}$$

Vi vet fra side 513 i Adams at summen *S* oppfyller

$s_n + \mathrm{A}_{n+1} \leq \ S \ \leq s_n + A_n$

Slik at vi har begrensningene

$s_n + \frac{1}{2\,(n+1)^2} \leq \ S \ \leq s_n + \frac{1}{2\,n^2}, n > 1$

Vi skal så bruke midtpunktet i dette intervallet til å finne den minste *n* slik at

$|S - s_n| < 0.001$. Vi vet at feilen vi gjør er mindre enn $\frac{(A_n - A_{n+1})}{2}$, så vi definerer

$simplify\left(\frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{2\,(n+1)^2}\right)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} \tag{5}$$

For å finne minste *n* kan vi bruke *solve:*

$assume(n > 1);$
$solve\left(\left(\frac{1}{4}\,\frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}\right) < 0.001\ ,\ UseAssumptions\right)$

$$RealRange(Open(7.457962448),\ \infty) \tag{6}$$

Her har jeg bedt Maple anta at *n*>1, for å bare få med positive svar. Vi ser at det minste heltallet som gjør feilen mindre enn 0.001 er 8.

Vi kan også regne ut feilen for forskjellige *n,* dette kan gjøres slik:

for n **from** 1 **to** 10 **do**
$print\left(n, evalf\left(\frac{1}{4}\,\frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}\right)\right)$
end do;

1, 0.1875000000
2, 0.03472222222
3, 0.01215277778
4, 0.005625000000
5, 0.003055555556
6, 0.001842403628
7, 0.001195790816
8, 0.0008198302469
9, 0.0005864197531
10, 0.0004338842975 (7)

Vi ser fra listen at når *n=8* er feilen mindre enn 0.001.

Ber vi Maple regne ut
$S := Sum(a(k), k = 1..infinity)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \tag{8}$$

får vi
$value(\%)$

$$\zeta(3) \tag{9}$$

ζ(s) er Riemann-Zeta funksjonen av s, og har mange spennende egenskaper. ζ(3) er et irrasjonalt tall, men vi har vist i denne oppgaven at $\left|\zeta(3) - \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^3}\right| < 0.001$, eller

$$\left|\zeta(3) - \frac{78708473}{6585600}\right| < 0.001,$$

siden

$sum\left(\frac{1}{j^3}, j = 1..8\right)$

$$\frac{78708473}{65856000} \qquad (10)$$