Oppsummering TMA4100

Kristian Seip

26./28. november 2013

Forelesningene 26./28. november

Disse forelesningene er et forsøk på å se de "store linjer" og sammenhengen mellom de ulike deltemaene i TMA4100—delvis illustrert gjennom noen utvalgte eksamensoppgaver. Læringsmålene for de enkelte forelesningene gir utfyllende informasjon om hva man bør kunne.

Illustrerende oppgaver til første forelesning vil være

- Oppgave 2, august 1999
- Oppgave 7, august 2000
- Oppgave 5, desember 2003
- Oppgave 3, desember 2003
- Oppgave 9, desember 2000
- Oppgave 3, desember 1998.

Vi vil gå litt på tvers av pensum, men hovedvekten i første forelesning vil være på første del, til og med kapittel 5 i A & E.

Kompletthetsegenskapen til de reelle tall

Denne egenskapen som for oss er et aksiom, gir oss noen av de mest grunnleggende og viktige setningene:

- Skjæringssetningen
- Ekstremalverdisetningen
- Sekantsetningen
- Kontinuerlige funksjoner på et lukket intervall er integrerbare og som konsekvens analysens fundamentalteorem
- Begrensede monotone følger er konvergente.

Merk den grunnleggende betydningen av kontinuerlige funksjoner på et lukket intervall i de fire første punktene.

Derivasjon og lineær approksimasjon

Den deriverte kan tolkes som

- endringsrate (grunnlag for formulering av differensialligninger)
- stigningstallet til tangenten til grafen i det aktuelle punktet.

En omskrivning av definisjonen av den deriverte, nært forbundet med sistnevnte tolkning, leder til følgende: En funksjon f er deriverbar i x_0 med derivert $f'(x_0)$ hvis og bare hvis vi kan skrive

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x),$$

hvor $E(x)/(x - x_0) \to 0$ når $x \to x_0$. Sagt på en annen måte: f kan approksimeres "godt" som en lineær funksjon nær x_0.

Videre fra lineær approksimasjon:

Direkte fra ideen om lineær approksimasjon har vi:

- Newtons metode, trapesmetoden og Eulers metode (de enkleste numeriske algorimene vi har sett).

Når ideen om lineær approksimasjon utvides til approksimasjon ved hjelp av polynom av grad høyere enn 1, får vi

- Taylorpolynom og Taylors formel
- Simpsons metode (eksakt for polynom av grad opp til og med 3)
- Til slutt, når vi går fra polynom til potensrekker, får vi Taylorrekker.

Merk at når vi lar graden øke, krever vi stadig mer av funksjonen. Det er bare en meget spesiell (men viktig) klasse av funksjoner (såkalte analytiske funksjoner) som kan representeres ved hjelp av potensrekker.

Ubestemte former

Som kjent kan disse ofte håndteres ved hjelp av L'Hôpitals regel. Men man vil som regel kunne forstå slike uttrykk bedre om man bruker Taylorrekker eller approksimerer ved hjelp av Taylorpolynom. Eksempel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)} = ?$$

Kjerneregelen

Kjerneregelen har mange anvendelser. Spesielt bør nevnes:

- Implisitt derivasjon
- Koblede hastigheter (“related rates”).

Vi illustrerer dette med de tre siste oppgavene på ovenstående liste med eksamensoppgaver.

Forelesning 28.11.

I andre oppsummeringsforelesning vil vi se på grensebegrepet, Riemann-integralet, anvendelser av integrasjon, differensialligninger og rekker. Illustrerende oppgaver til denne andre forelesningen vil være

- Oppgave 7, desember 2009
- Oppgave 5, august 2003
- Oppgave 5, desember 2003
- Oppgave 5, august 2013.

Grenseverdier

De mest grunnleggende objektene som inngår i kalkulus, er definert gjennom grenseverdier:

- kontinuerlige funksjoner
- den deriverte
- grenser av følger og sum av rekker
- det bestemte integral.

I de tre første tilfellene er grensebegrepet essensielt det samme. Definisjonen av det bestemte integral er mer subtil, og grenseprosessen er nesten “usynlig” slik integralet er definert i A&E: Funksjonen er integrerbar når det finnes kun ett tall I som er større enn eller lik alle nedre Riemann-summer og mindre enn eller lik alle øvre Riemann-summer. I praksis betyr dette at bare maskevidden (lengden på delintervallene) i partisjonen er liten nok, vil en hvilken som helst Riemann-sum komme så nær I (det bestemte integral) som vi måtte ønske.

Det ubestemte integral

Det bestemte integral som en “grense av Riemann-summer”

- reflekteres i notasjonen $\int_a^b f(x)dx$
- ligger til grunn for numerisk integrasjon (trapes og Simpson)
- ligger til grunn for våre ulike anvendelser av integralet; det handler alltid om hvordan vi skal kutte opp i småbiter, forstå hvordan hver av disse bidrar og hvordan vi til slutt skal summere disse.

Merk at vi i en generell Riemann-sum tenker på en kontinuerlig funksjon som essensielt konstant på et lite intervall—dette er altså en grovere tilnærming enn lineær approksimasjon! (I trapes og Simpson forbedres dette, under forutsetning av at funksjonen har deriverte av en viss orden.)

Differensialligninger

Vi har sett at vi kan løse

- separable ligninger $y' = g(x)h(y)$
- generelle lineære ligninger $y' + p(x)y = q(x)$ ved å multiplisere ligningen med den integrerende faktoren $e^{P(x)}$, hvor P er en antiderivert til p. Poenget er at venstresiden dermed kan skrives som $(e^P y)'$.
- det generelle initialverdiproblemet $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, forutsatt eksistens og entydighet av løsning, ved hjelp av Eulers metode $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h$, $x_n = x_0 + nh$.

I tillegg skal vi være i stand til å formulere enkle differensialligninger ut fra kjennskap til hvordan et gitt system endrer seg instantant. (I eksamenssammenheng dreier det seg her om "tekstoppgaver" eller "uoppstilte problemer".)

Rekker

En viktig motivasjon for å studere rekker, er at de kan brukes til å representere funksjoner som summer av enkle “bygge-klosser”. Vi har kun sett på potensrekker, det vil si at “bygge-klossene” er konstanter ganget med $(x-a)^n$ for en gitt a.[1]

Fra den generelle rekketeorien bør man ha oppfattet at

- per definisjon er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent dersom følgen av partialsummer $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ er konvergent
- Hvis $\sum a_n$ konvergerer, har vi at $a_n \to 0$ når $n \to \infty$
- En rekke kan konvergere fordi leddene går raskt nok mot 0 (absolutt konvergens) eller p.g.a. tilstrekkelig “balanse” mellom positive og negative ledd (betinget konvergens; jf. alternerende rekke-test og teleskopering)
- Absolutt konvergens kan ofte avgjøres ved sammenligning med passende uegentlig integral eller p-rekke.

[1] Ideen om å representere “generelle” funksjoner ved hjelp av rekker vil dukke opp igjen senere, f. eks. i forbindelse med Fourier-rekker.

Potensrekker

Det mest grunnleggende om potensrekker:

- Enhver potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ har en konvergensradius R som ofte kan finnes ved hjelp av forholdstesten
- Hvis $R > 0$, vil rekken konvergere absolutt *og like raskt som en geometrisk rekke* i $(a-R, a+R)$
- P.g.a. den raske konvergensen kan funksjonen (dvs. summen av rekken) på intervallet $(a-R, a+R)$ deriveres og integreres ved leddvis derivasjon og integrasjon; de nye rekkene vil ha samme konvergensradius
- Rekken representerer en kontinuerlig funksjon på konvergensintervallet (Abels teorem)
- Spørsmålet om konvergens i endepunktene kan ofte avgjøres ved sammenligning med p-rekke eller alternerende rekke-test.

Til slutt:

Takk for følget og lykke til på eksamen!