TMA4100 FOR TMFYMA
ØVINGSOPPGAVER TIL FORELESNING 22.08.2013

A & E 1.4.18. Vi skal velge m slik at

$$g(x) = \begin{cases} x - m, & x < 3 \\ 1 - mx, & x \geq 3 \end{cases}$$

er kontinuerlig for alle x. Funksjonen er åpenbart kontinuerlig når $x \neq 3$. Videre er $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 3 - m$ og $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 1 - 3m$. Vi vil ha kontinuitet også for $x = 3$ hvis venstre- og høyregrensen er sammenfallende, dvs. hvis $3 - m = 1 - 3m$ eller altså $m = -1$.

A & E 1.4.22. Vi har $x + y = 8$, dvs. $y = 8 - x$ og dessuten $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Vi har at

$$x^2 + y^2 = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64,$$

og dermed blir problemet å finne minimum og maximum til $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$ på det lukkede intervallet $[0, 8]$. Ved komplettering av kvadrat får vi $f(x) = 2(x - 4)^2 + 32$, og dermed ser vi at minimumsverdien 32 oppnås når $x = 4$ og maksimumsverdien 64 oppnås i endepunktene $x = 0$ og $x = 8$.

A & E 1.4.30. Vi setter $f(x) = x^3 - 15x + 1$ og skal vise at $f(x) = 0$ for minst tre punkter i intervallet $[-4, 4]$. Vi observerer at $f(-4) = -3$, $f(-3) = 19$, $f(1) = -13$, $f(4) = 5$. Vi kan dermed bruke skjæringssetningen til å konkludere at vi har $f(x) = 0$ for en x i hvert av intervallene $(-4, -3)$, $(-3, 1)$ og $(1, 4)$.

A & E 1.4.32. Vi antar at f er kontinuerlig og tilfredsstiller $0 \leq f(x) \leq 1$ på $[0, 1]$ og skal vise at det finnes en c i $[0, 1]$ slik at $f(c) = c$, dvs. f har et fikspunkt c i $[0, 1]$. Hvis $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$, kan vi velge $c = 0$ eller $c = 1$. Vi kan derfor anta at $f(0) > 0$ og $f(1) < 1$. Vi betrakter funksjonen $g(x) = f(x) - x$. Ved vår antagelse har vi $g(0) > 0$ og $g(1) < 0$. Skjæringssetningen sier nå at det finnes en $0 < c < 1$ slik at $g(c) = 0$, hvilket vil si at $f(c) = c$.

Date: 26. august 2013.