

TMA4100 FOR TMFYMA
ØVINGSOPPGAVER FRA FORELESNING 21.08.2013

A & E 1.5.11. Vi skal vise at

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1) = 4.$$

Vi antar vi har gitt en vilkårlig $\varepsilon > 0$. Det gjelder å finne en $\delta > 0$ (avhengig av ε) slik at

$$|3x + 1 - 4| < \varepsilon$$

når $0 < |x - 1| < \delta$. Siden $|3x + 1 - 4| = 3|x - 1|$, kan vi velge $\delta = \varepsilon/3$. Resultatet følger ved definisjon av grensen.

A & E 1.5.19. Vi skal vise at

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1.$$

Vi antar vi har gitt en vilkårlig $\varepsilon > 0$. Det gjelder å finne en $\delta > 0$ (avhengig av ε) slik at

$$|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$$

når $0 < |x - 1| < \delta$. Siden vi opplagt må kreve $x \geq 0$, får vi

$$|x - 1| = (\sqrt{x} + 1)|\sqrt{x} - 1| \geq |\sqrt{x} - 1|.$$

Vi får derfor det ønskede resultat ved å velge $\delta = \varepsilon$, eller for å være pinlig nøyaktig $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ siden vi har kravet at $x \geq 0$. Resultatet følger nå ved definisjon av grensen.

A & E 1.2.21 & 22. Den gitte funksjonen $|x - 2|/(x - 2)$ er lik -1 når $x < 2$ og 1 når $x > 2$. Vi får derfor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 2|}{x - 2} = -1$$

og dessuten

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = -1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = 1.$$

A & E 1.2.75. Siden

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) = 2 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2,$$

får vi ved skviseregelen at

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2.$$

A & E 1.3.11. Her får vi

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3 - x} = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{3 - x} = -\infty.$$

Date: 22. august 2013.

A & E 1.2.28. Dette er et $\infty - \infty$ -uttrykk som vi best håndterer ved å trekke sammen de to leddene. Vi setter altså på felles brøkstrek:

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{-2x^2}{x^2-1} = \frac{-2}{1-1/x^2}.$$

Vi kan dermed lese av at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) = -2.$$