

Eksempel 4

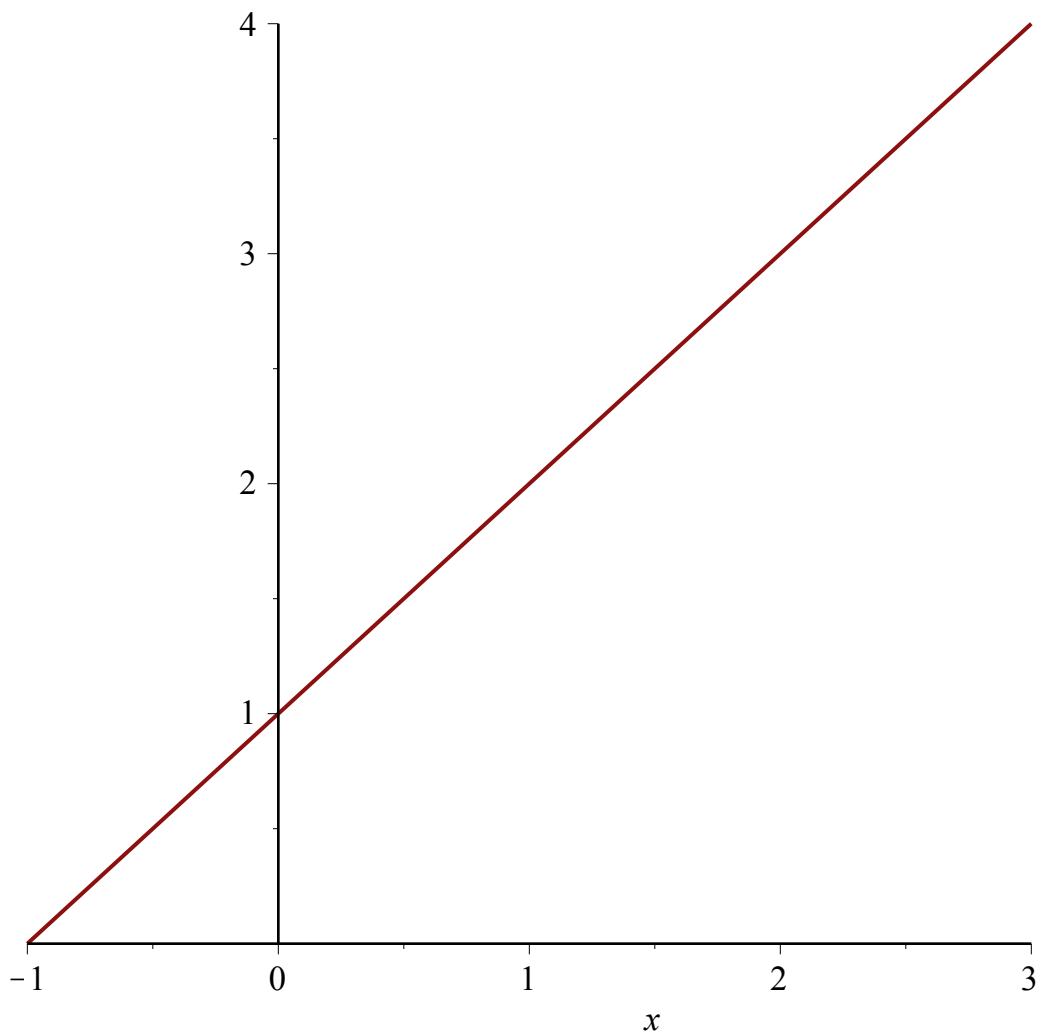
La oss bruke Maple til å tegne grafen til funksjonen $f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{x - 1}$.

$$f := x \rightarrow \frac{(x^2 - 1)}{x - 1};$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(1)

`plot(f(x), x=-1..3);`



På grafen ser vi at selv om $f(x)$ ikke er definert for $x = 1$, så nærmer $f(x)$ seg 2 når x går mot 1. Dette kan vi også vise ved hjelp av Maple:

`limit(f(x), x = 1);`

2

(2)

Eksempel 5

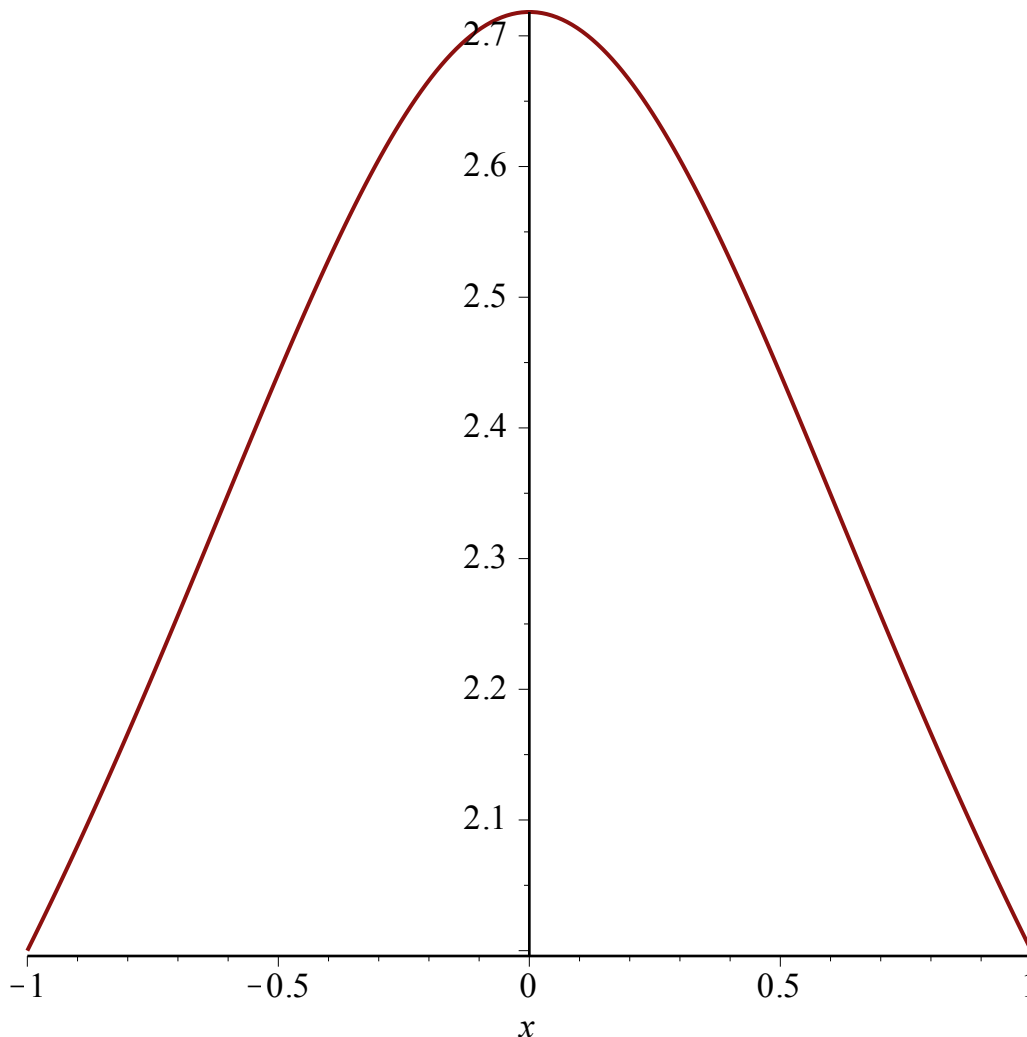
La oss se på hva funksjonen $g(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ nærmer seg når x går mot 0. La oss først tegne grafen til g .

```
g := x -> (1 + x^2)^(1/x^2);
```

```
x -> (1 + x^2)^(1/x^2)
```

(3)

```
plot(g(x), x = -1 .. 1);
```



På grafen ser det ut til at selv om $g(x)$ ikke er definert for $x = 0$, så nærmer $g(x)$ seg 2,71828 når x går mot 0.

La oss prøve å få Maple til å regne ut hva funksjonen $g(x)$ nærmer seg når x går mot 0 ved å regne ut verdien av $g(x)$ for $x = 0,1$, $x = 0,01$, $x = 0,001$, $x = 0,0001$ og $x = 0,00001$.

```
for n from 1 to 5 do print(evalf(g((0.1)^n))) end do;
```

```
2.704813829
```

```
2.718145927
```

```
2.718280469
```

2.718281815

1. (4)

At Maple returnere verdien 1 når x er 0,00001 skyldes avrundingsfeil. Dette viser at man ikke alltid kan bruke numeriske tilnærmelser til å beregne grenseverdier.

La oss til slutt vise at Maple kan regne ut grenseverdien av $g(x)$ når x går mot 0.

`limit(g(x), x = 0);`

e (5)

For at få en numerisk verdi av grenseverdien bruker vi følgende kommando:

`evalf(%);`

2.718281828 (6)

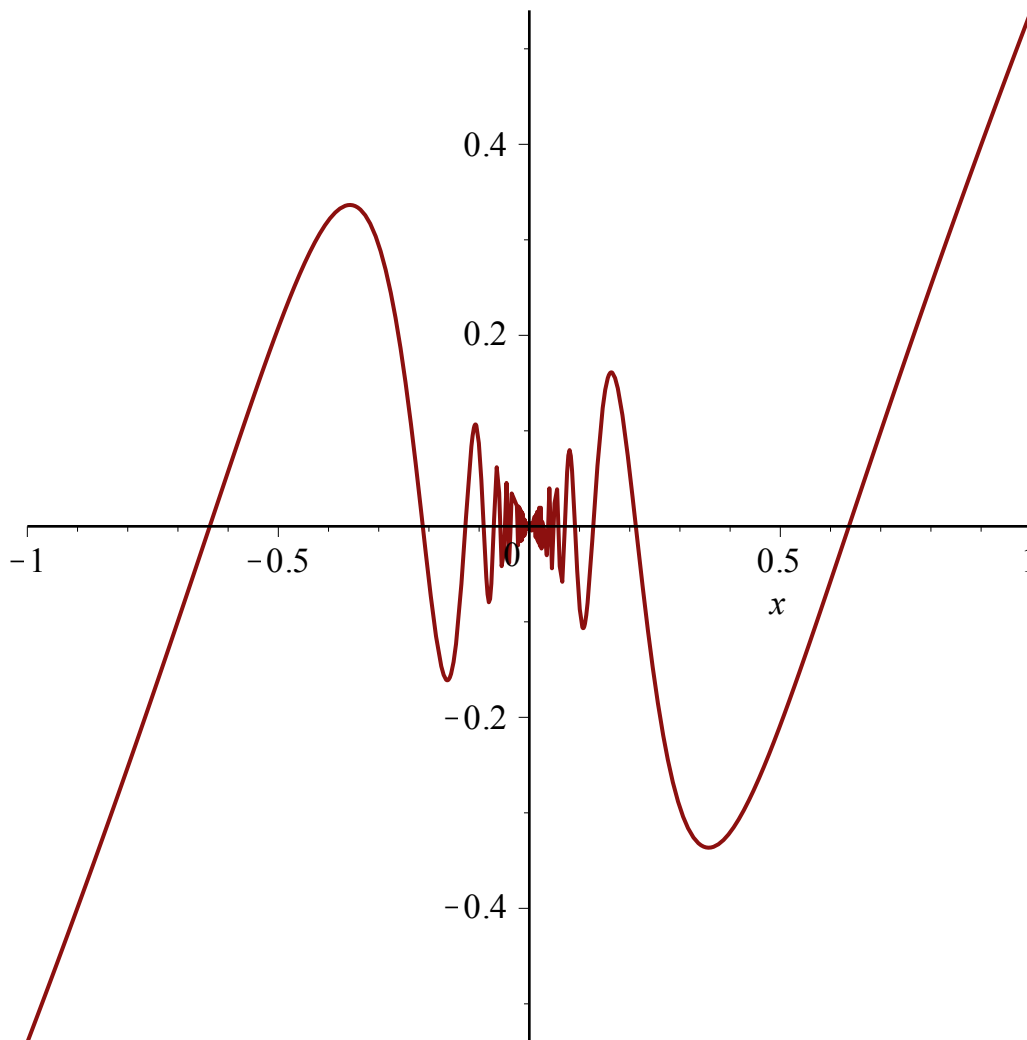
Eksempel 9

La oss bestemme grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Vi tegner først grafen til $g(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

`g := x -> x cos(1/x);`

`x -> x cos(1/x)` (7)

`plot(g(x), x = -1 .. 1);`



Det synes at $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Da $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ for alle θ følger det at

$-|x| \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$ for alle x forskjellig fra 0. Da $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ følger det av

Skvisesetningen at $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

La oss illustrere det.

$f := x \rightarrow -|x|;$

$x \rightarrow -|x|$

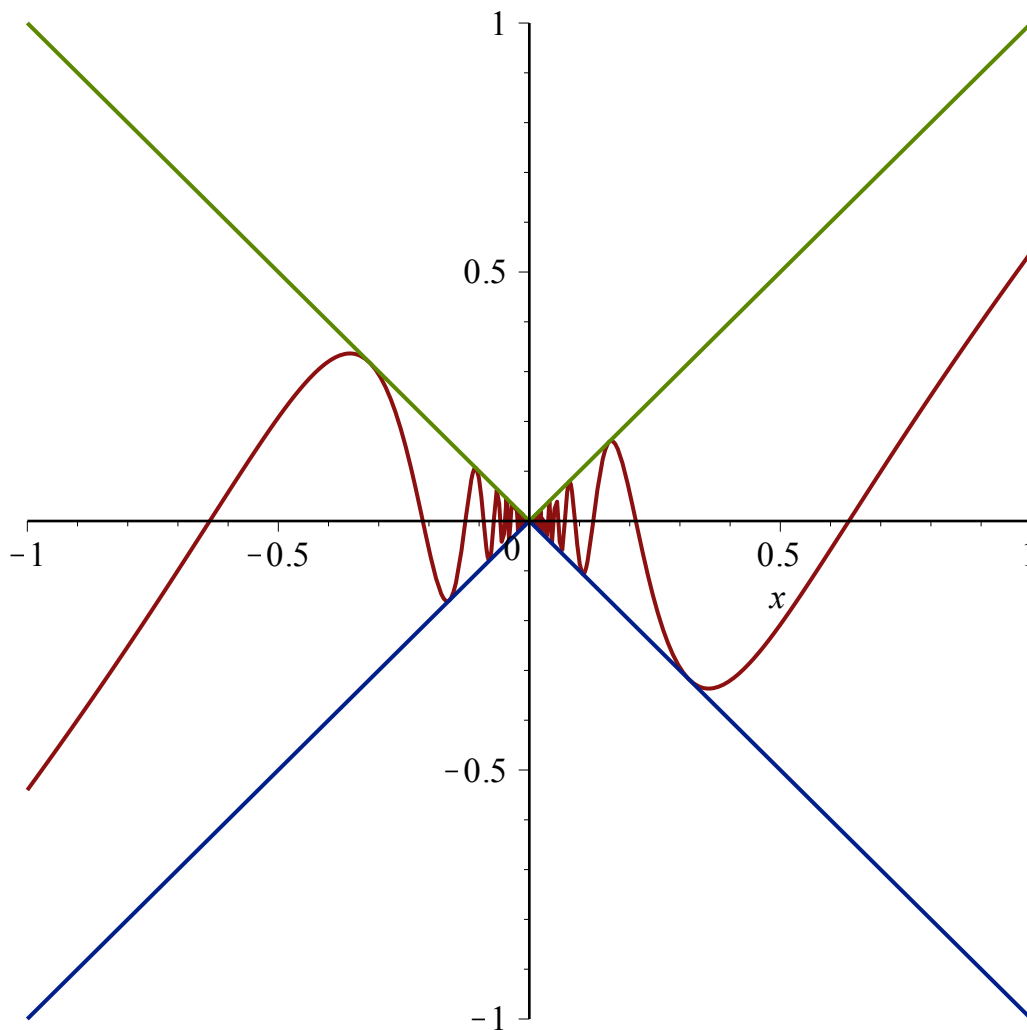
(8)

$h := x \rightarrow |x|;$

$x \rightarrow |x|$

(9)

$plot(\{f(x), g(x), h(x)\}, x = -1 .. 1);$



Eksempel 10

La $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

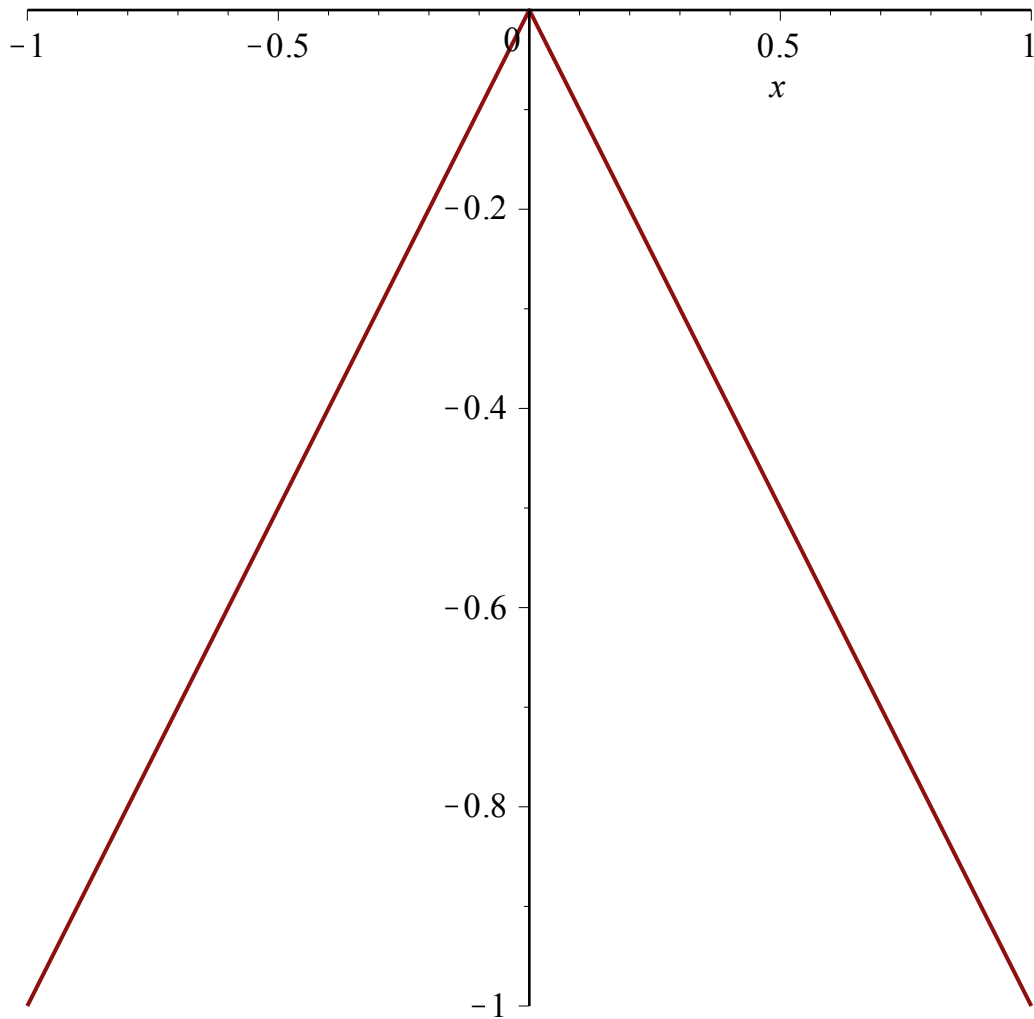
La oss tegne grafen til f .

$f := x \rightarrow \frac{x}{|x|};$

$x \rightarrow \frac{x}{|x|}$

(10)

$plot(f(x), x = -1 .. 1);$



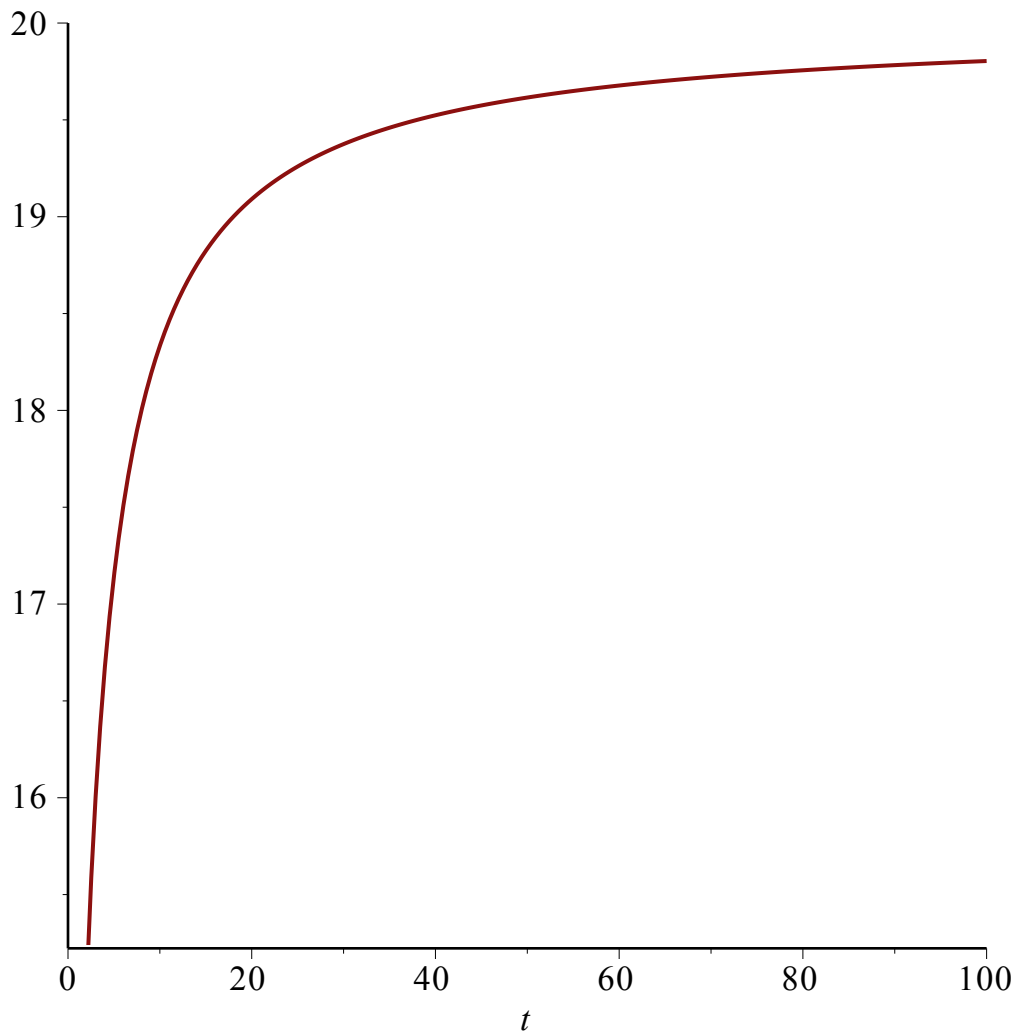
Eksempel 13

Anta at biomassen av en alge-kultur målt i gram er gitt ved $m(t) = 20(1 - 1/(t + 2))$ der t er målt i dage. La oss se på hvordan biomassen utvekler seg på lang sikt:

$$m := t \rightarrow 20 \left(1 - \frac{1}{t+2} \right);$$

$$t \rightarrow 20 - \frac{20}{t+2} \tag{11}$$

`plot(m(t), t = 0 .. 100);`



Det synes at biomassen på lang sikt nærmer seg 20 gram. La oss vise at det er tilfellet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t);$$

20

(12)

Eksempel 14

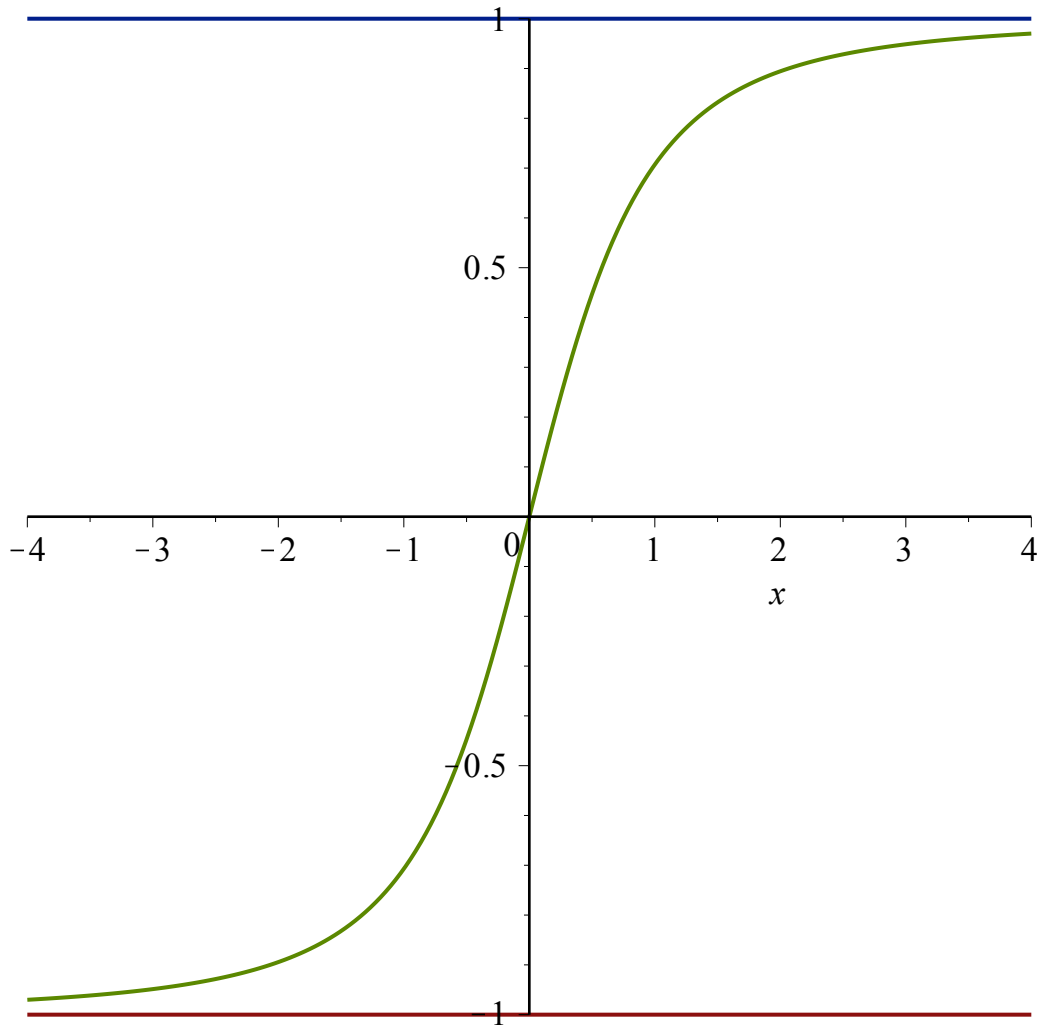
Funksjonen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ har $y = 1$ og $y = -1$ som horisontale asymptoter. La oss illustrere det:

$$f := x \rightarrow \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}};$$

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(13)

`plot({f(x), 1, -1}, x=-4..4);`



Eksempel 15

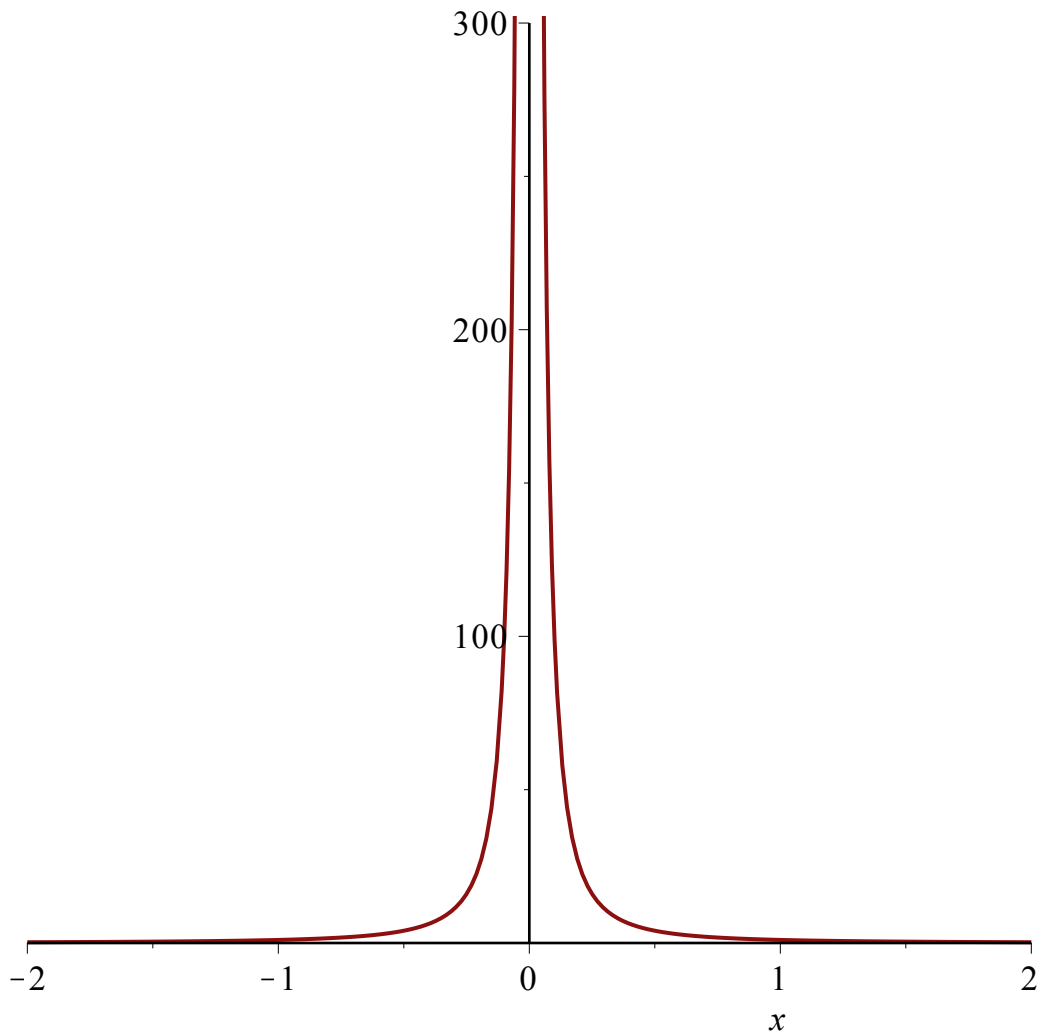
La oss se på $f(x) = \frac{1}{x^2}$ når x går mot 0.

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x^2};$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

`plot(f(x), x=-2..2);`

(14)



Det synes at $f(x)$ går mot uendelig når x går mot 0. La oss vise at det er tilfellet:
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

∞

(15)

Eksempel 16

Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote for $f(x) = \frac{1}{x}$. La oss illustrere det vha. Maple:

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x};$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

(16)

$$\text{plot}(f(x), x = -1 .. 1);$$

