Litt om Logikk, Definisjoner og Teoremer.
Mengder og Egenskaper ved de Reelle Tall.
Bevisføring i Teori og Praksis

Karl K. Brustad

11. august 2013

1 Logikk

Logikk er læren om lovene som gjør tenkningen, resoneringen og argumentasjonen **gyldig**.

Definisjon 1. *En **påstand** er et utsagn som enten er sant eller usant (men ikke begge deler).*

Eksempel: 1. *Gitt en person 'Ole' og gitt fire tall $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, så er følgende utsagn påstander.*

- *'Ole er Trønder'*
- $a \geq 5$
- $ax^2 + bx + c = 0$.

*Følgende utsagn er **ikke** påstander*

- *'Hva er det til middag?'*
- $ax^2 + bx + c$.

Hvis sannheten av en påstand, H (hypotese), medfører at en annen påstand, K (konklusjon), er sann, skriver vi

$$H \Rightarrow K.$$

F.eks. vil vår erfaring tilsi at påstanden 'Ole er Trønder' medføre at påstanden 'Ole er nordmann' er sann. På samme måte vet vi at $x \geq 5$ medfører $x \geq 2$.

De følgende uttrykkene betyr nøyaktig det samme og er bare språklige variasjoner over det faktum at $x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$:

- **Hvis** $x \geq 5$, **så** er $x \geq 2$
- $x \geq 5$ impliserer/medfører at $x \geq 2$
- $x \geq 2$ **hvis** $x \geq 5$
- $x \geq 5$ **bare hvis** $x \geq 2$
- $x \geq 2$ er en **nødvendig** betingelse for at $x \geq 5$
- $x \geq 5$ er en **tilstrekkelig** betingelse for at $x \geq 2$.

Oppgave 1.

1. *Uttrykk 'Ole er Trønder'* $\Rightarrow$ *'Ole er nordmann' på de seks ulike måtene som vist over.*
2. *Uttrykk* $H \Rightarrow K$ *på de seks ulike måtene som vist over.*

Implikasjonspilen '$\Rightarrow$' er et veldefinert matematisk symbol og kan bare stå mellom to påstander. Videre, hvis P og Q er påstander, så kan vi godt spørre om det er sant at $P \Rightarrow Q$. Altså, uttrykket $P \Rightarrow Q$ er en påstand i seg selv.

Så, når er $P \Rightarrow Q$ sann? Hver av påstandene P og Q kan enten være sann eller usann, så det er fire forskjellige kombinasjoner å undersøke. Når vi påstår at $P \Rightarrow Q$ vil vi egentlig bare utelukke tilfellet der P er sann uten at Q er sann. Vi kan oppsummere dette i følgende tabell:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Tabell 1: Sannhetstabell

Første rad i tabell 1 sier at $P \Rightarrow Q$ er sann når P og Q begge er sanne, og andre rad sier at $P \Rightarrow Q$ er usann når P er sann, men Q er usann. De to nederste radene er kanskje ikke like åpenbare, men se på følgende eksempel:

La $x \in \mathbb{R}$.

Påstand 1. *Hvis* $x^2 < 0$*, så er* $x = x$

Påstand 2. *Hvis* $x^2 < 0$*, så er* $x < x$

Er påstandene sanne eller usanne? For det første, ettersom de er påstander, må de være sanne eller usanne, men ikke begge deler. Hvis de er usanne, så må det finnes et moteksempel. Altså, det må finnes en x som tilfredsstiller $x^2 < 0$, men som ikke tilfredsstiller henholdsvis $x = x$ eller $x < x$. Men, det finnes ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at $x^2 < 0$. Dermed finnes ingen moteksempler. Altså er påstandene ikke usanne. Altså, begge påstandene er sanne.

Her er to andre eksempler som verifiserer de to siste radene i tabell 1. Anta at $1 = 2$ (som er usant). Ved regnereglene for tall kan vi da bevise følgende:

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 \\
\Rightarrow \quad & 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 \\
\Rightarrow \quad & 0 = 0 \quad \text{(som er sant)}.
\end{aligned}
$$

Dvs. $(1 = 2 \Rightarrow 0 = 0)$ er en sann påstand.

Anta igjen at $1 = 2$ (som er usant). Da er

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 \\
\Rightarrow \quad & 1 + 3 = 2 + 3 \\
\Rightarrow \quad & 4 = 5 \quad \text{(som er usant)}.
\end{aligned}
$$

Likevel er $(1 = 2 \Rightarrow 4 = 5)$ en sann påstand.

La oss nå utvide tabell 1 med tre kolonner: $ikkeQ$, $ikkeP$ og $ikkeQ \Rightarrow ikkeP$. Vi fyller først inn kolonnene for $ikkeQ$ og $ikkeP$ og deretter fylles siste kolonne inn etter de reglene vi har etablert.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$ikkeQ$	$ikkeP$	$ikkeQ \Rightarrow ikkeP$
S	S	S	U	U	S
S	U	U	S	U	U
U	S	S	U	S	S
U	U	S	S	S	S

Tabell 2: Sannhetstabell II

Observér at tredje og sjette kollonne er like. Altså $ikkeQ \Rightarrow ikkeP$ er sann **hvis og bare hvis** $P \Rightarrow Q$. Vi har dermed bevist følgende nyttige teorem:

Teorem 1.

$$(P \Rightarrow Q) \iff (ikkeQ \Rightarrow ikkeP).$$

Definisjon 2. *Hvis A og B er to påstander, så sier vi at A og B er* ***ekvivalente*** *(notasjon: $A \iff B$) hvis $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$. Språklige varianter er*

- *A er* ***ekvivalent*** *med B*
- *A* ***hvis og bare hvis*** *B*
- *A er* ***nødvendig*** *og* ***tilstrekkelig*** *for at B*

- *A **iff** B.*

Oppgave 2. *La $x \in \mathbb{R}$. Hvilke av de følgende påstandene er sanne?*

1. $x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$
2. $x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
3. $x = 2$ eller $x = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$
4. $x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ eller $x = -2$

Løsning: 1),3) og 4) er sann. 2) er usann.

2) er usann fordi det finnes et unntak: nemlig hvis $x = -2$, så er hypotesen $x^2 = 4$ sann, men konkusjonen $x = 2$ er usann.

Merk at 3) og 4) kan kombineres til ekvivalensen

$$x^2 = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm 2 \tag{1.1}$$

der $x = \pm 2$ er en notasjon for påstanden ($x = 2$ eller $x = -2$).

Fra grunnskolen er vi vant med oppgaver av typen 'løs ligningen $x^2 = 4$.' Å løse en ligning i x betyr å finne **alle** x slik at påstanden ligningen representerer er sann. Retningen $\underline{\Leftarrow}$ i (1.1) forteller oss at 2 og -2 **er** løsninger av ligningen, mens retningen $\underline{\Rightarrow}$ i (1.1) forteller oss at 2 og -2 er de **eneste** løsningene.

Oppgave 3. *Bevis følgende teorem:*

Teorem 2. *La $a, b, x \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$. Da er*

$$ax + b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}.$$

Bevis. $\underline{\Rightarrow}$:

Anta at $ax + b = 0$. Da er

$$\begin{aligned} & ax + b = 0 \\ \Rightarrow \quad & ax + b - b = 0 - b \\ \Rightarrow \quad & ax = -b \\ \Rightarrow \quad & \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \\ \Rightarrow \quad & x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Vi har altså bevist at hvis $ax + b = 0$, så er $x = -\frac{b}{a}$.

$\underline{\Leftarrow}$:

Anta at $x = -\frac{b}{a}$. Da er

$$\begin{aligned} ax + b &= a\left(-\frac{b}{a}\right) + b \\ &= \frac{-ab}{a} + b \\ &= -b + b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Så hvis $x = -\frac{b}{a}$, så er $ax + b = 0$. □

Kommentarer til Oppgave 3

Teoremet er en ekvivalens, noe som betyr at beviset har to deler. Disse delene merkes henholdsvis med $\underline{\Rightarrow}$: og $\underline{\Leftarrow}$:.

Teoremet starter med å beskrive en situasjon, nemlig at $a, b, x \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$. Disse påstandene er en del av hypotesen i begge bevisdelene.

Merk at den første delen av beviset er en kjede av implikasjoner der hver linje impliserer den neste linjen. Hver linje impliserer den neste pga. regnereglene for tall og for å illustrere disse regnereglene er det tatt med flere detaljer enn hva som vanligvis er nødvendig. Linje 2 og 4 kan med fordel sløyfes. Ofte sløyfes også implikasjonspilene i slike sammenhenger og det menes da underforstått at hver påstand impliserer den under.

Der den første delen av beviset er en kjede av påstander forbundet med implikasjonspiler, er andre del av beviset en kjede av tall forbundet med likhetstegn – dvs. en utregning. Når det føres med likhetstegn under hverandre, slik som

$$\begin{aligned} A &= B \\ &= C \\ &= D \\ &= E, \end{aligned}$$

tenker vi

$$A = B \quad \text{og} \quad B = C \quad \text{og} \quad C = D \quad \text{og} \quad D = E$$

og <u>ikke</u>

$$A = B \quad \text{og} \quad A = C \quad \text{og} \quad A = D \quad \text{og} \quad A = E.$$

Selv om dette også er sant, representerer dette ikke den **logiske flyten** i utregningen: For først kan vi påstå at

$$ax + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b \quad \text{fordi} \quad x = -\frac{b}{a},$$

og så kan vi påstå at

$$a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=\frac{-ab}{a}+b \quad \text{pga. regneregler for tall}$$

osv.

Ettersom likhetstegnet har egenskapen

$$x=y \quad \text{og} \quad y=z \quad \Rightarrow \quad x=z,$$

vil en føring med likhetstegnene under hverandre tydelig vise at $A=E$, eller $ax+b=0$ som var formålet med utregningen i beviset i oppgave 3.

Tilslutt må det nevnes at bevis sjeldent er unike og oppgaver kan ofte løses på flere – mer eller mindre – ulike måter. F.eks. er del to i beviset ovenfor unødvendig fordi alle implikasjonspilene i del en, faktisk kan erstattes med ekvivalenser.

2 Definisjoner, Teoremer og Bevis

Et av de viktigste formålene med matematikk er å kunne gi oss innsikt i den verden vi lever i. Altså, matematikk kan hjelpe oss å besvare spørsmål og avgjøre sannheten av påstander som er relevante for oss.

F.eks. Hvis $t \mapsto v(t)$ er en funksjon som beskriver hastigheten til en partikkel og $s(t)$ er posisjonen til partikkelen ved tiden t, er da

$$s(t)=s(0)+\int_0^t v(\tau)\,d\tau?$$

Et slikt spørsmål er selvsagt meningsløst før det er definért nøyaktig hva som menes med begrepene som blir brukt. Vi må bla. vite hva som menes med **funksjon**, **hastighet** og $\int_0^t v(\tau)\,d\tau$ før slike spørsmål kan bli besvart.

2.1 Definisjoner

Gode definisjoner er helt essensielt. Ikke bare er de nødvendige for at matematikere skal ha den samme forståelsen av tekniske begreper slik at de kan kommunisere med hverandre, gode definisjoner er også nødvendige for å kunne stille de riktige spørsmålene. Det er f.eks. ikke tilfeldig at – gitt en funksjon f – man har definert en funksjon f' som

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Matematikere brukte tusenvis av år for å komme frem til denne definisjonen. Så hvorfor er dette en god definisjon? Den er god fordi den har vist seg å være **nyttig** i den forstand at den gir oss mulighet til å stille og besvare spørsmål som er viktig for oss.

Likevel er det en hake. $\boxed{\text{Det er umulig å definere ethvert konsept.}}$ Anta, f.eks, at vi ønsker å definere begrepet *mengde* som 'en **mengde** er en veldefinert samling av objekter.' Et naturlig spørsmål er da hva som menes med *samling* og man må da gi en definisjon av dette ordet. Poenget er at når et matematisk begrep skal defineres, så må det gjøres med begreper som er definert fra før. Men ettersom språket vårt er endelig vil vi tilslutt gå tomme for nye ord og vi blir tvunget til å gjenta ord som allerede er brukt. Definisjonene vil dermed gå i sirkel og vil opplagt være verdiløse.

Altså, all matematikk starter fra et **valgt utgangspunkt** bestående av **udefinerte begreper** og **ubegrunnede påstander**. Dette kan virke som en svakhet ettersom hele byggverket av teoremer da vil rase sammen hvis det viser seg at grunnmuren var gal. På den andre side, kan man påstå at det er nettopp dette som gjør matematikken allsidig og nyttig. Fordi, ved ikke å presisere den eksakte *naturen* til de udefinerte begrepene, så vil teoremene være gyldige i **alle** situasjoner der disse begrepene gis en konkret betydning som tilfredstiller de ubegrunnede påstandene.

2.2 Teoremer og Bevis

Når man har etablert disse grunnleggende begrepene og påstandene, kan man begynne å lage nye definisjoner og begynne å spørre hva man kan fastslå av nye sannheter. Et **teorem** er en påstand som kan bevises, og et **bevis** er en sekvens av steg som leder oss – på en logisk korrekt måte – fra hypotesen til konklusjonen i teoremet. Hvert steg skal rettferdiggjøres av en grunn, og det er seks typer grunner som kan bli gitt:

- ved hypotese
- ved en av de ubegrunnede påstandene
- ved et tidligere teorem
- ved definisjon
- ved et tidligere steg i beviset
- ved en av reglene for logikk

3 Mengder

En mengde er altså et objekt innenfor matematikk som ikke lett kan defineres ut ifra andre matematiske begreper. Likevel er det mulig å ha en felles forståelse av hva en mengde er hvis vi er enige om hvilke egenskaper en mengde skal tilfredstille.

3.1 Generelle egenskaper ved mengder

Vi oppsummerer raskt noen av tingene vi antar skal holde for mengder.

- En mengde er unikt definert av hvilke **elementer** den har, så hvis mengden M består av elementene $2, \pi$ og $-3/4$, skriver vi

$$M = \{2, \pi, -3/4\}.$$

- Rekkefølgen er ikke viktig, så $M = \{-3/4, 2, \pi\}$
- Gjenntagende elementer telles **ikke**, så $M = \{-3/4, 2, \pi, 2, 2\}$
- Det er ingen begrensninger på hvilke type elementer en mengde kan bestå av. Elementene kan f.eks være tall (slik som i M), vektorer, funksjoner, mengder eller kombinasjoner av disse.
- Hvis objektet a (et tall, funksjon, mengde, etc.) er et element i en mengde A, så skriver vi $a \in A$. Hvis ikke a er et element i A, så skriver vi $a \notin A$. a kan ikke både være og ikke være et element i A. Altså

$$ikke(a \in A) \iff a \notin A$$

Gitt to mengder, kan det defineres relasjoner mellom dem på følgende måter

- Hvis alle elementene i en mengde A også er elementer i en mengde B, så sier vi at A er en **delmengde** av B og skriver $A \subseteq B$. Altså

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff A \subseteq B$$

- Hvis to mengder A og B inneholder nøyaktig de samme elementene så sier vi at A og B er **like** og skriver $A = B$. Altså,

$$(x \in A \iff x \in B) \iff A = B$$

  (Merk at vi ovenfor brukte likhetstegnet intuitivt da vi definerte mengden M.)

Gitt to mengder, kan det defineres nye mengder på følgende måter

- Hvis A og B er to mengder, kan vi danne en ny mengde C bestående av alle elementene fra både A og B. Vi sier da at C er **unionen** av A og B og skriver $C = A \cup B$. Altså

$$(x \in A \quad \text{eller} \quad x \in B) \iff x \in A \cup B$$

- Hvis A og B er to mengder, kan vi danne en ny mengde C bestående av alle elementene som er felles for både A og B. Vi sier da at C er **snittet** av A og B og skriver $C = A \cap B$. Altså

$$(x \in A \quad \text{og} \quad x \in B) \iff x \in A \cap B$$

3.2 Noen viktige tallmengder

De Naturlige Tall

Det trengs åpenbart et alternativ til å liste opp elementene når mengder med uendelig mange elementer skal beskrives.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

er mengden av alle **naturlige tall**. Prikkene '...' indikerer at elementene fortsetter i det uendelige etter et opplagt mønster.

Heltallene

På samme måte kan vi benevne alle **heltall** som

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Mengdebeskrivelse vha Betingelse

Mengden av alle punktene i planet som danner en sirkel med sentrum i origo og radius 1 kan beskrives som

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Den vertikale streken '|' betyr '*slik at*', så dette leses som '*C er mengden av alle punkter (x, y) i planet slik at $x^2 + y^2 = 1$*'. Dette er et eksempel på hvordan mengder kan beskrives vha. en betingelse:

$$A = \{a \mid P(a)\}$$

'*A er mengden av alle a slik at $P(a)$*' der $P(a)$ er en påstand som avhenger av a. Vi har altså at

$$a \in A \iff P(a).$$

F.eks. – gitt et punkt (x_0, y_0) – er det enkelt å bevise om $(x_0, y_0) \in C$ eller ikke. Vi trenger bare å sjekke om påstanden holder for det gitte punktet.

Oppgave 4. *La mengden C være definert som over og*

1. *Vis at $(-2, 1) \notin C$*
2. *Vis at $(x_0, y_0) \in C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right) \in C$*

Løsning 1:

Bevis.

$$(-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad (-2, 1) \notin C.$$

□

Løsning 2:

Bevis. Anta $(x_0, y_0) \in C$, dvs. $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 + x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0^2\right) \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Dvs, $\left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right) \in C$. □

De Rasjonale Tallene

De **rasjonale tallene** er alle tall på formen $\frac{m}{n}$ der m og n er heltall og $n \neq 0$. Mengden av de rasjonale tallene benvnes tradisjonelt med $\mathbb{Q}$.

Oppgave 5. *Beskriv mengden av de rasjonale tallene som*

$$\mathbb{Q} = \{a \mid P(a)\}.$$

Løsning:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad n \neq 0\right\}.$$

Oppgave 6. *Er* $0.123123123\cdots$ *et rasjonalt tall? Hvorfor/Hvorfor ikke? (Desimalene fortsetter i det uendelige med gjentagende siffer 1,2,3).*

Løsning: Ja. La $x = 0.123123\cdots$. Da er

$$1000x = 123.123123\cdots,$$

så

$$\begin{aligned}999x &= 1000x - x \\ &= 123.123123\cdots - 0.123123\cdots \\ &= 123.\end{aligned}$$

Og dermed er

$$\begin{aligned}0.123123\cdots &= x \\ &= \frac{123}{999} \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Intervaller

Intervaller er delmengder av de reelle tallene som er såpass ofte brukt at de har en egen notasjon.

Definisjon 3. *La $a, b \in \mathbb{R}$ der $a < b$. Vi definer da henholdsvis det* ***åpne intervallet fra a til b****, det* ***lukkede intervallet fra a til b*** *og de* ***halvåpne intervallene fra a til b*** *som*

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

4 De Reelle Tall

Man trodde lenge at $\mathbb{Q}$ inneholdt alle tallstørrelser – noe som er ganske nærliggende å tro ettersom de rasjonale tallene ligger veldig tett på tallinjen: for hvis p og q er to ulike rasjonale tall, så finnes det alltid et rasjonalt tall mellom dem – uansett hvor nærme p og q ligger hverandre. (gjennomsnittet av p og q er et rasjonalt tall.) Det var derfor en stor overaskelse da Pytagoreerne oppdaget at lengden av diagonalen i et kvadrat med sidelengde 1, er et tall som ikke ligger i $\mathbb{Q}$. Ved Pytagoras' læresetning må lengden av diagonalen være det positive tallet som ganget med seg selv blir 2, altså tallet som i moderne notasjon har symbolet $\sqrt{2}$. Beviset for at $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ er en klassiker innenfor tallteori.

Det er dermed klart at det trengs en større mengde enn $\mathbb{Q}$ for å kunne beskrive størrelser vi intuitivt mener bør eksistere, og løsningen på dette problemet er å innføre de **reelle tall**.

Mengden av de reele tall benevnes tradisjonelt med $\mathbb{R}$, men de lar seg ikke beskrive som en mengde like lett som $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$. Dét er heller ikke nødvendig, for vi kan velge $\mathbb{R}$ til å være et **udefinert begrep** i betydningen som beskrevet tidligere.

De ubegrunnede påstandene som elementene i denne mengden er funnet nyttig å tilfredsstille, kan deles inn i tre kategorier.

1. Algebraiske egenskaper
2. Ordningsegenskaper
3. Kompletthetsegenskaper

Algebraiske Egenskaper

De *algebraiske egenskapene* er 'regnereglene' man lærte i grunnskolen for utregninger og ligningsløsning. De sier at alle par av elementer i $\mathbb{R}$ kan *adderes* og *multipliseres* og danne et nytt element i $\mathbb{R}$. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$, symboliseres dette henholdsvis som $a+b \in \mathbb{R}$ og $ab \in \mathbb{R}$. Når vi skriver $a = b$ så menes det at a og b er det samme elementet i $\mathbb{R}$ og $a = b$ impliserer at $a + c = b + c$ og $ac = bc$ for alle reelle tall c. Addisjon og multiplikasjon er udefinerte begreper, men det kreves at de tilfredsstiller følgende. Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$, så medfører det at

1. $a + b = b + a$ og $ab = ba$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ og $(ab)c = a(bc)$
3. det finnes to unike elementer $0, 1 \in \mathbb{R}$ slik at $a + 0 = a$ og $1b = b$
4. det finnes to elementer $-a, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ slik at $a + (-a) = 0$ og $b\frac{1}{b} = 1$ forutsatt at $b \neq 0$
5. $a(b + c) = ab + ac$

(Notasjon: Vi skriver ofte $b - a$ istedet for $b + (-a)$ og $\frac{b}{a}$ istedet for $b\frac{1}{a}$).

Da vi i grunnskolen ble presentert uttrykk som $a + b$ eller $\frac{a}{b}$, var det ofte med et imperativ om at 'noe skulle gjøres'. Vi skulle 'legge a til b' eller 'dele a med b'. Dette gjenspeilte seg i oppgavene som kanskje var av typen '$13 + 8 = \_\_$' eller '$13 : 8 = \_\_$' og man skulle da fylle inn henholdsvis 21 og 1.625. Å svare henholdsvis $8 + 13$ og $\frac{13}{8}$ ville neppe ha imponert lærerene, selv om disse svarene ville ha avslørt en mye dypere matematisk forståelse. Nå er fokuset et annet og istedet for å oppleve uttrykket $a+b$ som et oppdrag, så ser vi på $a + b$ som **et tall** (med trykk på både 'et' og 'tall').

Altså, $a + b$ og ab er tall på lik linje med alle andre tall og har følgelig også de samme egenskapene.

Kompletthetsegenskapen

Kompletthetsegenskapen er den mest teknisk krevende kategorien å forstå. Den sier grovt sett at $\mathbb{R}$ er uten "hull". Det er denne egenskapen som skiller de reelle tallene fra $\mathbb{Q}$ – de rasjonale tallene – og er helt essensiell for å bevise mange av teoremene i Kalkulus. Man kan på mange måter si at Kalkulus er studiet av $\mathbb{R}$.

Ordingsegenskapene

Ordingsegenskapene er egenskaper vedrørende en relasjon '$<$'(mindre enn) mellom to reelle tall. Altså, uttrykket $'a < b'$ er en påstand. Og hvis $a, b \in \mathbb{R}$, så er nøyaktig en av de følgende påstandene sann.

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$

($'a > b'$ er bare en annen notasjon for $'b < a'$) Videre kreves det at

$$a < b \quad \text{og} \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

Relasjonen '$<$' beskriver vår intuitive oppfatning av at et tall kan være mindre enn et annet, Eller – hvis vi ser for oss tallinjen som en modell av $\mathbb{R}$ – at et tall ligger til venstre for et annet. Vi lister de ubegrunnede påstandene i sin helhet, som vist på s.4 i *Adams*.

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$, så vil

1. $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$
2. $a < b \quad \Rightarrow \quad a - c < b - c$
3. $a < b$ og $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$
4. $a < b$ og $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$
5. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 0$
6. $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Reglene 1-4 og 6 (for $a > 0$) holder også hvis $<$ og $>$ erstattes henholdsvis med $\leq$ og $\geq$. Påstanden $a \leq b$ er en raskere notasjon for påstanden ($a < b$ *eller* $a = b$.)

5 Å Løse og å Føre en Oppgave i Praksis

Matematikk er en eksakt vitenskap i den forstand at den er bygd opp av entydige definisjoner og klare teoremer. Derimot, er det å **løse og føre** en matematikkoppgave en kreativ prosess som ikke kan beskrives like nøyaktig. Jeg vil likevel forsøke å gi noen råd og regler som du kanskje vil finne nyttige når du skal løse øvings- eller ekamensoppgaver.

Å **løse** en oppgave vil si å gjøre det oppgaven ber deg om å gjøre. Det virker kanskje banalt å påpeke dette, men det er faktisk en vanlig feil at dette kravet ikke blir oppfyllt. Med **føring** menes hva som konkret skrives på papiret. Ofte krever oppgaven at man også skal *vise utregningen*, eller *begrunne svaret*. Dermed blir føringen også en del av løsningen.

Hvorfor er det viktig med en god føring?

En god føring vil hjelpe deg å holde oversikt og gir deg muligheten til å dra nytten av å kunne **løse oppgaven som en kjede av delproblemer**. Dette er en helt grunnleggende ferdighet. F.eks. så ville de fleste av oss hatt store problemer med å multiplisere to tre-sifrede tall uten kalkulator hvis det ikke hadde vært for at det finnes et språk og en metode for å gjøre dette med penn og papir. Denne metoden lærte vi i grunnskolen, og er et godt eksempel på hvordan man løser et problem vha. en kjede delproblem, hver bestående av – i dette tilfellet – multiplikasjon av én-sifrede tall. For hvert løst delproblem blir resultatet ført, og tilslutt samles disse resultatene til en løsning av problemet.

Det er dette som menes med *å tenke på papir*: når et delproblem er løst, føres resultatet ned og man kan frigjøre hjernen til å konsentrere seg om neste delproblem.

Å løse et problem.

Å løse et problem som en rekke delproblemer krever at man er istand til å identifisere hvilke delproblemer som vil lede frem til løsningen. Dette er ikke trivielt, men begynn med å forsikre deg om at du **forstår problemet**. Altså, få en oversikt over **hva vet vi?** og **hva ønsker vi å finne?**

Hvis en 'Vis at'-oppgave er fordekt med mye tekst, kan det være en fordel å forsøke å omskrive oppgaven slik at den får en klar 'Hvis...så...'-struktur.

Det er en vanlig misforståelse at ideér må være ferdigtenkte før man begynner å skrive, så **gi navn til variabler og størrelser** og, om mulig, **tegn en figur**. Dette vil ikke bare lette notasjonen, men også trigge hukommelsen til å hente frem verktøyene som er relevante for det aktuelle problemet.

Finn nå en vei som vil føre frem til løsningen av problemet, og **gjennomfør planen** vha. de verktøyene du har til rådighet. Tilslutt sammenfatter du resutatene slik at de på en **logisk korrekt** måte viser at du har løst oppgaven.

5.1 Å føre en oppgave.

Føringen er altså et nødvendig redskap for å kunne løse en oppgave, og en forbedring av føringen vil gjøre at du vil kunne løse vanskeligere oppgaver. Matematikk er et eget språk med sine egne gloser og rettskrivningsregler, og i tillegg kommer også en rekke konvensjoner og normer for hvordan det er vanlig å benevne ting. Jeg skal først si litt om to grunnleggende gloser i matematikken: Likhetstegn og implikasjon.

Likhetstegn

Legg prestisje i å bruke likhetstegnet riktig! Et likhetstegn danner en **påstand** om at det som står på den ene siden er det samme som står på den andre siden. Hva *det samme som* betyr, kan faktisk være mye forskjellig, som f.eks at to funksjoner, to mengder eller at to tall er de samme i en veldefinert betydning. Merk at likhetstegnet kan brukes til mange forskjellige formål: f.eks når vi i starten av en oppgave navngir et integral med bokstaven I, så er formålet å lette notasjonen i de videre utregningene. Likhetstegn brukes til å definere nye konsepter eller det brukes i resultatet til teoremer. Det brukes i ligninger og det brukes i identiteter.

Implikasjoner

Implikasjonpiler er symboler som skrives som $\Leftarrow, \Rightarrow$ eller $\iff$, og mens likhetstegnet står mellom to tall og danner en påstand, skal en **implikasjonspil alltid stå mellom to påstander** og danner da en ny påstand. Vi skriver $\Rightarrow$ mellom to påstander når den første påstanden **medfører** eller **impliserer** den siste, vi skriver $\Leftarrow$ når den siste påstanden medfører den første, og vi skriver $\iff$ dersom begge påstandene medfører den andre. Isåfall sier vi at påstandene er **ekvivalente**.

Bruk av tekst

Det er (heldigvis) ikke slik at matematiske symboler kan erstatte all vanlig tekst når du løser en oppgave. Her er vi inne på konvensjoner og du må selv finne ut av hva som passer best for deg. Her er likevel noen tips.

Bruk så mye tekst at du selv ville ha forstått hva som er blitt gjort. Det er ofte ikke mye tekst som skal til for at føringen blir mye klarere.

Når du f.eks. bruker opplysninger som er gitt i oppgaveteksten, så vil et enkelt *har at* eller *det er oppgitt at* foran denne opplysningen forhindre at du senere begynner å lure på hva som er grunnlaget for denne påstanden. Når du navngir størrelser, kan det være greit å legge til et *La*. Hvis oppgaven ber deg om å bevise en påstand, er det selvfølgelig særdeles viktig at du skriver *Skal vise at*, eller lignende, foran denne påstanden i føringen.

- Istedet for $\Rightarrow$ kan du kanskje skrive *dvs.*, *så*, *dermed er*, *dette fører til*, *og vi ser at* eller *bare hvis*
- Istedet for $\Leftarrow$ kan det ofte være bedre å skrive *hvis*, *når* eller *fordi*
- Istedet for $\iff$ skriver man ofte *hvis og bare hvis* eller *som er ekvivalent med*
- Istedet for $\forall$ kan du skrive *for alle*
- istedet for $\exists$ kan du skrive *det eksisterer* eller *det finnes*

5.2 Layout

Hva skal skrives hvor på papiret du har foran deg? Her er det sikkert mange meninger, men poenget er at det er greit å ha et bevisst forhold til dette slik at du kan finne ut av hva som passer best for deg.

Skriv øvinger med penn på ulinjerte ark. Dette gir den reneste og mest tydelige føringen.

Operer med to venstremarger der du lar vanlig tekst starte på den første margen og der matematikk starter på den andre margen 2-4 cm lengre inn. Korte matematiske utsagn kan derimot skrives 'inline' som en integrert del av teksten.

Ved lengre utregninger skal du la **likhets- eller ulikhetstegnene stå under hverandre** og dersom det er plass, og nødvendig, kan du kommentere hver linje i en egen kollonne til høyre for utregningen. Ettersom poenget med en utregning er å vise at det første uttrykket er lik (ev. større eller mindre enn) det det siste uttrykket, så vil fordelen med å føre uttregningen på denne måten være at det blir en **tydelig kjede av (u)likhetstegn** bakover, fra svaret, til dét som du ville beregne.

Vurdér hvem som er publikum for å avgjøre hvor mange detaljer som skal være med i en utregning eller bevisføring. En hovedregel kan likevel være **å inkludere akkurat så mange detaljer at du selv ville ha forstått hvert steg.**

Start et bevis med å skrive 'bevis:' øverst til venstre og avslutt med $\square$nederst til høyre.

La det komme klart frem, f.eks. ved understreking, hva som er viktige delresultater og marker også løsningen av oppgaven med et strek eller to. Dermed kan du, og alle andre, se hvordan oppgaven er blitt løst bare vha. et raskt overblikk. Husk at **dersom oppgaven er å bevise en påstand, så er selve beviset av påstanden løsningen av oppgaven.**

6 Oppgaver

Oppgave 7. *La a og b være to positive tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at*

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2.$$

Bevis. $\underline{\Rightarrow}$:

Anta $a < b$. Ettersom $a > 0$, så følger det fra 3) at $a^2 < ab$. På samme måte, ettersom $b > 0$, så følger det fra 3) at $ab < b^2$. Altså er $a^2 < ab < b^2$. Dvs. $a^2 < b^2$.

$\underline{\Leftarrow}$:

Anta ikke $a < b$. Dvs. $b \leq a$. Ettersom $a > 0$, så følger det fra 3) at $ab \leq a^2$. På samme måte, ettersom $b > 0$, så følger det fra 3) at $b^2 \leq ab$. Altså er $b^2 \leq ab \leq a^2$. Dvs. $b^2 \leq a^2$. Altså ikke $a^2 < b^2$. $\square$

Oppgave 8. *La a og b være to negative tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at*

$$a < b \quad \iff \quad a^2 > b^2.$$

Bevis. $\underline{\Rightarrow}$:

Anta $a < b$. Ettersom $a < 0$, så følger det fra 4) at $a^2 > ab$. På samme måte, ettersom $b < 0$, så følger det fra 4) at $ab > b^2$. Altså er $a^2 > ab > b^2$. Dvs. $a^2 > b^2$.

$\underline{\Leftarrow}$:

Anta ikke $a < b$. Dvs. $b \leq a$. Ettersom $a < 0$, så følger det fra 4) at $ab \geq a^2$. På samme måte, ettersom $b < 0$, så følger det fra 4) at $b^2 \geq ab$. Altså er $b^2 \geq ab \geq a^2$. Dvs. $b^2 \geq a^2$. Altså ikke $a^2 < b^2$. $\square$

Oppgave 9. *Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at*

$$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}.$$

Bevis. Anta $0 < a < b$. Det følger fra 6) at $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ og det følger da fra 3) at

$$b\frac{1}{b} < b\frac{1}{a} \quad \text{og} \quad a\frac{1}{b} < a\frac{1}{a}.$$

Dvs.

$$1 < \frac{b}{a} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} < 1.$$

$\square$

Oppgave 10. *La x og c være to positive tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at*

$$x < cx \quad \iff \quad c > 1.$$

Bevis. $\underline{\Rightarrow}$:

Anta $x < cx$. Ettersom $x \neq 0$ finnes et tall $\frac{1}{x}$ slik at $x\frac{1}{x} = 1$. Ved 5) er $\frac{1}{x} > 0$ så ved 3) er

$$x\frac{1}{x} < cx\frac{1}{x}.$$

Dvs. $1 < c$.

$\underline{\Leftarrow}$:

Anta $1 < c$. Ettersom $x > 0$, så er $x < cx$ ved 3). $\square$

Oppgave 11. *Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at*

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Vi skal bevise at **hvis** $x \in \mathbb{R}$, **så** er $x^2 \geq 0$.

Anta $x \in \mathbb{R}$. Da er enten $x = 0$, $x > 0$ eller $x < 0$. Hvis $x = 0$, så er

$$x^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Hvis $0 < x$, så er ved 3) $0x < x^2$. Dvs

$$x^2 > 0.$$

Hvis $x < 0$, så er ved 4)

$$x^2 > 0x = 0.$$

Altså, i alle tilfeller er $x^2 \geq 0$. $\square$

Oppgave 12. *Bruk de algebraiske egenskapene til å bevise at produktet av to reelle tall er 0 hvis og bare hvis minst en av faktorene er 0.*

Bevis. La $x, y \in \mathbb{R}$. Vi skal bevise

$$xy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0.$$

$\underline{\Leftarrow}$: Anta $y = 0$. Da er

$$\begin{aligned} xy &= x0 \qquad \text{ved hypotese} \\ &= x(0+0) \qquad \text{ved 3)} \\ &= x0 + x0 \qquad \text{ved 5)} \\ &= xy + xy \qquad \text{ved hypotese.} \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= xy - xy \qquad \text{ved 4)} \\ &= (xy + xy) - xy \qquad \text{ved beregningen over} \\ &= xy + (xy - xy) \qquad \text{ved 2)} \\ &= xy + 0 \qquad \text{ved 4)} \\ &= xy \qquad \text{ved 3)} \end{aligned}$$

Hvis $x = 0$, er beviset helt tilsvarende.

$\underline{\Rightarrow}$: Anta $xy = 0$.

Hvis $x = 0$, så er konklusjonen sann. Hvis $x \neq 0$ så finnes ved 4) et tall $\frac{1}{x}$ slik at $\frac{1}{x}x = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{x}0 \qquad \text{ved beviset for } \underline{\Leftarrow} \text{ over} \\ &= \frac{1}{x}(xy) \qquad \text{ved hypotese} \\ &= \left(\frac{1}{x}x\right)y \qquad \text{ved 2)} \\ &= 1y \qquad \text{ved 4)} \\ &= y \qquad \text{ved 3).} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0.$$

□

Definisjon 4. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon*

- *f er **odde** dersom $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$*
- *f er **jevn** dersom $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$*

Oppgave 13. *Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x$ er odde.*

Oppgave 14. *Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x^2$ er jevn.*

Bevis. La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-1x)^2 \\ &= (-1)^2 x^2 \\ &= x^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Altså, $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Dvs. f er jevn. □

Oppgave 15. *La $m \in \mathbb{N}$ og la funksjonen f være gitt ved $f(x) = x^m$. Vis at f er odde hvis m er et oddetall og at f er jevn hvis m er et partall.*

Bevis. Anta m er et oddetall. Da finnes et ikke-negativt heltall k slik at $m = 2k + 1$. La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^m \\ &= (-x)^{2k+1} \\ &= -x(-x)^{2k} \\ &= -x\left((-x)^2\right)^k \\ &= -x\left(x^2\right)^k \\ &= -xx^{2k} \\ &= -x^{2k+1} \\ &= -x^m \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Dvs. f er odde.

Anta m er et partall.... □

Oppgave 16. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Vis at f er nullfunksjonen hvis og bare hvis f er odde og jevn.*

Vi skal bevise

$$f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ er odde og jevn.}$$

Bevis. $\underline{\Rightarrow}$: Anta $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(-x) = 0 = -0 = -f(x) \quad \text{og} \quad f(-x) = 0 = f(x)$$

så f er odde og jevn.

$\underline{\Leftarrow}$: Anta at f er odde og jevn og la $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{og} \quad f(-x) = f(x),$$

så $-f(x) = f(x)$. Dvs $2f(x) = 0$. Altså $f(x) = 0$.

□

Oppgave 17. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = 3x + 2$. La $x_0 \in \mathbb{R}$ og la ϵ være et positivt tall.*

La deretter $\delta = \epsilon/3$. Vis at hvis $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller

$$-\delta < x - x_0 < \delta,$$

(avstanden mellom x og x_0 er mindre enn δ)

så er

$$-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

(avstanden mellom $f(x)$ og $f(x_0)$ er mindre enn ϵ)

Bevis. Anta at $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller $-\delta < x - x_0 < \delta$. Da er

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= 3x + 2 - (3x_0 + 2) \\ &= 3(x - x_0) \\ &< 3\delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= 3(x - x_0) \\ &> 3(-\delta) \\ &= -\epsilon. \end{aligned}$$

Altså er

$$-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

□

Oppgave 18. *Vi vet at summen og produktet av to heltal igjen er et heltal. Vis at det samme også gjelder for de rasjonale tallene. Altså, bevis at*

$$p, q \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad p+q, pq \in \mathbb{Q}.$$

Bevis. Anta at p og q er rasjonale tall. Da finnes fire heltall a, b, c, d der $b \neq 0 \neq d$ slik at

$$p = \frac{a}{b}, \quad q = \frac{c}{d}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + cb}{bd} \in \mathbb{Q}. \\ pq &= \frac{a}{b}\frac{c}{d} \\ &= \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

fordi $ad + cb, bd, ac \in \mathbb{Z}$ og $bd \neq 0$. □

Oppgave 19. *La $n \in \mathbb{N}$ og la $p_1, p_2, \ldots, p_n$ være n rasjonale tall. Vis at*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \in \mathbb{Q}.$$

Bevis. Fra foregående oppgave vet vi at $p_1 + p_2 \in \mathbb{Q}$, så dermed er også

$$p_1 + p_2 + p_3 = (p_1 + p_2) + p_3 \in \mathbb{Q},$$

som igjen viser at

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = (p_1 + p_2 + p_3) + p_4 \in \mathbb{Q}.$$

Ved å fortsette på denne måten, vil vi tilslutt ha vist at

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \in \mathbb{Q}.$$

□

Oppgave 20. *Vis at alle desimaltall med endelig mange siffer, er et rasjonalt tall.*

Bevis. La x være et desimaltall med endelig mange siffer. Det finnes da to naturlige tall m, n slik at x kan skrives som

$$x = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n-1} a_{-n}$$

der a_i for $i = -n, \ldots m$ er et heltall mellom 0 og 9.

Med denne notasjonen mener vi ikke multiplikasjon, men at

$$\begin{aligned}
x &= a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1}\frac{1}{10} + \cdots + a_{-n}\frac{1}{10^n} \\
&= \sum_{i=-n}^{m} a_i 10^i.
\end{aligned}$$

som er en endelig sum av rasjonale tall og dermed er $x \in \mathbb{Q}$ ved oppgaven over. $\square$

Oppgave 21. *Er tallet* $1 - 0.9999\cdots$ *større, mindre eller lik 0?*

Løsning: La $x = 0.999\cdots$. Da er

$$\begin{aligned}
9x &= 10x - x \\
&= 9.999\cdots - 0.999\cdots \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Dvs.

$$0.9999\cdots = x = \frac{9}{9} = 1$$

og $1 - 0.9999\cdots = 0$.