NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 9

Derivasjon

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Tilnærminger til små endringer.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Tilnærminger til små endringer.
2. Vekstfart.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Tilnærminger til små endringer.
2. Vekstfart.
3. Middelverdisetningen.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Tilnærminger til små endringer.
2. Vekstfart.
3. Middelverdisetningen.
4. Voksende og avtagende funksjoner.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Tilnærminger til små endringer.
2. Vekstfart.
3. Middelverdisetningen.
4. Voksende og avtagende funksjoner.
5. Implisitt derivasjon.

Tilnærminger til små endringer

Tilnærminger til små endringer

Anta at en størrelse y avhenger av en annen størrelse x.

Tilnærminger til små endringer

Anta at en størrelse y avhenger av en annen størrelse x.
Dvs. $y = f(x)$.

Tilnærminger til små endringer

Anta at en størrelse y avhenger av en annen størrelse x. Dvs. $y = f(x)$.

Anta at vi ønsker å vite hvor mye y endres seg hvis x endres seg med Δx.

Tilnærminger til små endringer

Anta at en størrelse y avhenger av en annen størrelse x. Dvs. $y = f(x)$.

Anta at vi ønsker å vite hvor mye y endres seg hvis x endres seg med Δx.

Den eksakte endringen er $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,

Tilnærminger til små endringer

Anta at en størrelse y avhenger av en annen størrelse x. Dvs. $y = f(x)$.

Anta at vi ønsker å vite hvor mye y endres seg hvis x endres seg med Δx.

Den eksakte endringen er $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, men hvis Δx er liten, kan vi få en god tilnærming til Δy ved å gjøre bruk av at $\frac{dy}{dx}$ er en tilnærming til $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Tilnærminger til små endringer

Tilnærminger til små endringer

Husk at hvis f er en deriverbar funksjon, så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tilnærminger til små endringer

Husk at hvis f er en deriverbar funksjon, så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vi får derfor følgende tilnærming:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = f'(x)\Delta x.$$

Tilnærminger til små endringer

Husk at vi lar dy være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx på følgende måte

$$dy = f'(x)dx.$$

Tilnærminger til små endringer

Husk at vi lar *dy* være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable *x* og *dx* på følgende måte

$$dy = f'(x)dx.$$

dy og *dx* kalles *differensialer*.

Tilnærminger til små endringer

Husk at vi lar dy være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx på følgende måte

$$dy = f'(x)dx.$$

dy og dx kalles *differensialer*.
Hvis vi lar $dx = \Delta x$, så får vi

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy.$$

Tilnærminger til små endringer

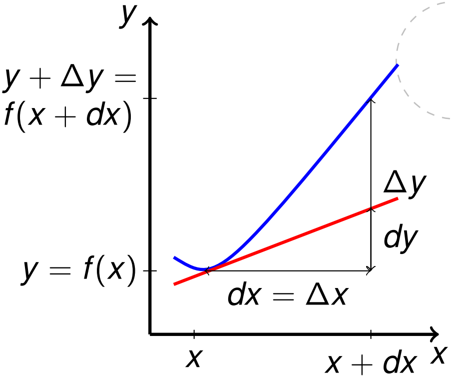
Husk at vi lar *dy* være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable *x* og *dx* på følgende måte

$$dy = f'(x)dx.$$

dy og *dx* kalles *differensialer*. Hvis vi lar $dx = \Delta x$, så får vi

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy.$$

Dvs. differensialet *dy* er en tilnærming til Δy.



Eksempel 1

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til $\tan(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til tan$(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Vi vet at tan$(\pi/4) = 1$,

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til $\tan(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Vi vet at $\tan(\pi/4) = 1$, og at
$\frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4} = \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{\cos^(\pi/4)} = 2$.

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til $\tan(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Vi vet at $\tan(\pi/4) = 1$, og at
$\frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4} = \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{\cos^(\pi/4)} = 2.$

Så

$$\tan(\pi/4 - 0.01) \approx \tan(\pi/4) + \frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4}(-0.01)$$
$$= 1 - 0.02 = 0.98.$$

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til $\tan(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Vi vet at $\tan(\pi/4) = 1$, og at $\frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4} = \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{\cos^(\pi/4)} = 2.$

Så

$$\tan(\pi/4 - 0.01) \approx \tan(\pi/4) + \frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4}(-0.01)$$
$$= 1 - 0.02 = 0.98.$$

La oss sammenlignes med verdien vi får hvis vi bruker Maple:

Eksempel 1

La oss prøve å finne en tilnærming til $\tan(\pi/4 - 0.01)$ uten bruk av kalkulator eller datamaskine.

Vi vet at $\tan(\pi/4) = 1$, og at

$\frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4} = \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{\cos^{(}\pi/4)} = 2.$

Så

$$\tan(\pi/4 - 0.01) \approx \tan(\pi/4) + \frac{d}{dx}(\tan x)\Big|_{x=\pi/4}(-0.01)$$
$$= 1 - 0.02 = 0.98.$$

La oss sammenlignes med verdien vi får hvis vi bruker Maple:

$$evalf\left(\tan\left(\frac{\text{Pi}}{4} - 0.01\right)\right);$$

0.9801973664

Eksempel 2.7.2

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Hvis A er arealet og r radius til sirkelen er $A = \pi r^2$,

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Hvis A er arealet og r radius til sirkelen er $A = \pi r^2$, så er $\Delta A \approx dA = \frac{dA}{dr} dr = 2\pi r dr$.

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Hvis A er arealet og r radius til sirkelen er $A = \pi r^2$, så er $\Delta A \approx dA = \frac{dA}{dr} dr = 2\pi r dr$.

Hvis radius økes med 2% er $dr = \frac{2}{100} r$,

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Hvis A er arealet og r radius til sirkelen er $A = \pi r^2$, så er $\Delta A \approx dA = \frac{dA}{dr} dr = 2\pi r dr$.

Hvis radius økes med 2% er $dr = \frac{2}{100} r$, og

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = \frac{\frac{4}{100}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{100}.$$

Eksempel 2.7.2

La oss estimere hvor mye arealet til en sirkel øker i prosent når radius økes med 2%.

Hvis A er arealet og r radius til sirkelen er $A = \pi r^2$, så er $\Delta A \approx dA = \frac{dA}{dr} dr = 2\pi r dr$.

Hvis radius økes med 2% er $dr = \frac{2}{100} r$, og

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = \frac{\frac{4}{100}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{100}.$$

Dvs. arealet til sirkelen økes omtrent med 4% når radius økes med 2%.

Vekstfart

Vekstfart

Definisjon 5: Vekstfart

Den *gjennomsnittlige vekstfarten* til en funksjon f i intervallet $[xa, a+h]$ er

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vekstfart

Definisjon 5: Vekstfart

Den *gjennomsnittlige vekstfarten* til en funksjon f i intervallet $[xa, a+h]$ er

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Den *momentane vekstfarten* til f i punktet $x = a$ er

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

(hvis f er deriverbar i $x = a$).

Eksempel 2.7.4

Eksempel 2.7.4

Anta at temperaturen på et sted t timer etter klokken 12 er T° der $T = (1/3)t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ for $0 \le t \le 5$.

Eksempel 2.7.4

Anta at temperaturen på et sted t timer etter klokken 12 er T° der $T = (1/3)t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ for $0 \le t \le 5$.

Fra klokken 12 til 17 endre temperature seg i gjennomsnitt med

$$\frac{T\big|_{t=5} - T\big|_{t=0}}{5-0} = \frac{\frac{1}{3}125 - 3 \cdot 25 + 40 + 10 - 10}{5} = -2$$

grader pr. time (den går fra 10° til 0°).

Eksempel 2.7.4

Anta at temperaturen på et sted t timer etter klokken 12 er T° der $T = (1/3)t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ for $0 \leq t \leq 5$.

Fra klokken 12 til 17 endre temperature seg i gjennomsnitt med

$$\frac{T\big|_{t=5} - T\big|_{t=0}}{5-0} = \frac{\frac{1}{3}125 - 3\cdot 25 + 40 + 10 - 10}{5} = -2$$

grader pr. time (den går fra 10° til 0°).

$$\frac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8,$$

Eksempel 2.7.4

Anta at temperaturen på et sted t timer etter klokken 12 er T° der $T = (1/3)t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ for $0 \leq t \leq 5$.

Fra klokken 12 til 17 endre temperature seg i gjennomsnitt med

$$\frac{T\big|_{t=5} - T\big|_{t=0}}{5-0} = \frac{\frac{1}{3}125 - 3 \cdot 25 + 40 + 10 - 10}{5} = -2$$

grader pr. time (den går fra 10° til 0°).

$\dfrac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8$, så den momentane vekstfarten til T er

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = t^2 - 6t + 8\big|_{t=1} = 3 \text{ grader per. time klokken 13,}$$

Eksempel 2.7.4

Anta at temperaturen på et sted t timer etter klokken 12 er T° der $T = (1/3)t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ for $0 \le t \le 5$.

Fra klokken 12 til 17 endre temperature seg i gjennomsnitt med

$$\frac{T\big|_{t=5} - T\big|_{t=0}}{5-0} = \frac{\frac{1}{3}125 - 3\cdot 25 + 40 + 10 - 10}{5} = -2$$

grader pr. time (den går fra 10° til 0°).

$\dfrac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8$, så den momentane vekstfarten til T er

$\dfrac{dT}{dt}\Big|_{t=1} = t^2 - 6t + 8\big|_{t=1} = 3$ grader per. time klokken 13, og

$\dfrac{dT}{dt}\Big|_{t=3} = t^2 - 6t + 8\big|_{t=3} = -1$ grader per. time klokken 15.

Middelverdisetningen

Middelverdisetningen

Teorem 11: Middelverdisetningen

Anta at en funksjon f er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Da finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Eksempel 2.8.1

Eksempel 2.8.1

La $f(x) = \sqrt{x}$ og la $0 \leq a < b$.

Eksempel 2.8.1

La $f(x) = \sqrt{x}$ og la $0 \leq a < b$.

Da er $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ og $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} =$
$\dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$.

Eksempel 2.8.1

La $f(x) = \sqrt{x}$ og la $0 \leq a < b$.

Da er $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ og $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} =$
$\dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$.

Middelverdisetningen sier da at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Eksempel 2.8.1

La oss finnen en slik c.

Eksempel 2.8.1

La oss finnen en slik c.

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \iff 2\sqrt{c} = \sqrt{b}+\sqrt{a}$$

$$\iff c = \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^2.$$

Eksempel 2.8.1

La oss finnen en slik c.

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \iff 2\sqrt{c} = \sqrt{b}+\sqrt{a}$$

$$\iff c = \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^2.$$

Da

$$a = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{b}\right)^2 = b$$

har vi at $c = \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^2$ er et punkt i intervallet (a, b) slik at $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Eksempel 2.8.2

Eksempel 2.8.2

La $x \in (0, 2\pi]$.

Eksempel 2.8.2

La $x \in (0, 2\pi]$. Da $\sin x$ er deriverbar følger det av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (0, x)$ slik at

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1.$$

Eksempel 2.8.2

La $x \in (0, 2\pi]$. Da $\sin x$ er deriverbar følger det av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (0, x)$ slik at

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1.$$

Det følger at $\sin x < x$ når $x \in (0, 2\pi]$.

Eksempel 2.8.2

La $x \in (0, 2\pi]$. Da $\sin x$ er deriverbar følger det av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (0, x)$ slik at

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1.$$

Det følger at $\sin x < x$ når $x \in (0, 2\pi]$.

Når $x > 2\pi$ er $\sin x \leq 1 < 2\pi < x$,

Eksempel 2.8.2

La $x \in (0, 2\pi]$. Da $\sin x$ er deriverbar følger det av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (0, x)$ slik at

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1.$$

Det følger at $\sin x < x$ når $x \in (0, 2\pi]$.

Når $x > 2\pi$ er $\sin x \leq 1 < 2\pi < x$, så $\sin x < x$ for alle $x > 0$.

Kritiske punker

Kritiske punker

For å bevise middelverdisetningen trenger vi to teoremer (Teorem 14 og 15) som også er interessante i seg selv.

Kritiske punker

For å bevise middelverdisetningen trenger vi to teoremer (Teorem 14 og 15) som også er interessante i seg selv.

Teorem 14

Anta at funksjonen f er definert på det åpne intervallet (a, b) og har et maksimum eller minimum i et punkt $c \in (a, b)$. Dersom f er deriverbar i c, må $f'(c) = 0$.

Kritiske punker

For å bevise middelverdisetningen trenger vi to teoremer (Teorem 14 og 15) som også er interessante i seg selv.

Teorem 14

Anta at funksjonen f er definert på det åpne intervallet (a, b) og har et maksimum eller minimum i et punkt $c \in (a, b)$. Dersom f er deriverbar i c, må $f'(c) = 0$.

Punkter c slik at $f'(c) = 0$ kalles *kritiske punkter*.

Bevis for teorem 14

Bevis for teorem 14

Anta at f har et maksimum i c.

Bevis for teorem 14

Anta at f har et maksimum i c. Da er $f(x) - f(c) \leq 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Bevis for teorem 14

Anta at f har et maksimum i c. Da er $f(x) - f(c) \leq 0$ for alle $x \in (a, b)$. Hvis $c < x < b$ har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Følgelig er

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Bevis for teorem 14

Tilsvarende har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

hvis $a < x < c$,

Bevis for teorem 14

Tilsvarende har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

hvis $a < x < c$, og dermed

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Bevis for teorem 14

Tilsvarende har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

hvis $a < x < c$, og dermed

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Følgelig må $f'(c) = 0$.

Bevis for teorem 14

Tilsvarende har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

hvis $a < x < c$, og dermed

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Følgelig må $f'(c) = 0$.

Tilfellet der f har et minimum i c er tilsvarende.

Rolles teorem

Teorem 15: Rolles teorem

Anta at en funksjon g er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Hvis $g(a) = g(b)$ finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $g'(c) = 0$.

Bevis for teorem 15

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$. La oss anta at $g(x) > g(a)$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$. La oss anta at $g(x) > g(a)$. Det følger av max-min teoremet at g har et maksimumspunkt $c \in [a, b]$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$. La oss anta at $g(x) > g(a)$. Det følger av max-min teoremet at g har et maksimumspunkt $c \in [a, b]$.

Da $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$, må $c \in (a, b)$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$. La oss anta at $g(x) > g(a)$. Det følger av max-min teoremet at g har et maksimumspunkt $c \in [a, b]$.

Da $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$, må $c \in (a, b)$. Det følger derfor av teorem 14 at $g'(c) = 0$.

Bevis for teorem 15

Hvis $g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a, b]$, er g konstant og $g'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Anta at det finnes en $x \in (a, b)$ slik at $g(x) \neq g(a)$. La oss anta at $g(x) > g(a)$. Det følger av max-min teoremet at g har et maksimumspunkt $c \in [a, b]$.

Da $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$, må $c \in (a, b)$. Det følger derfor av teorem 14 at $g'(c) = 0$.

Tilfellet der $g(x) < g(a)$ er tilsvarende.

Bevis for middelverdisetningen

Bevis for middelverdisetningen

La

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Bevis for middelverdisetningen

La
$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Da er $g(a) = g(b) = 0$ og g er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b).

Bevis for middelverdisetningen

La
$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$
Da er $g(a) = g(b) = 0$ og g er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Det følger derfor av Rolles teorem at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $g'(c) = 0$.

Bevis for middelverdisetningen

La
$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Da er $g(a) = g(b) = 0$ og g er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Det følger derfor av Rolles teorem at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $g'(c) = 0$.

Da $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ følger et at $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Voksende og avtagende funksjoner

Voksende og avtagende funksjoner

Definisjon 6: Voksende og avtagende funksjoner

La f være en funksjon som er definert på et intervall I. Da sies f å være

- *(strengt) voksende* på I dersom $f(x_2) > f(x_1)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ der $x_2 > x_1$.
- *(strengt) avtagende* på I dersom $f(x_2) < f(x_1)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ der $x_2 > x_1$.
- *ikke-avtagende* på I dersom $f(x_2) \geq f(x_1)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ der $x_2 > x_1$.
- *ikke-voksende* på I dersom $f(x_2) \leq f(x_1)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ der $x_2 > x_1$.

Voksende og avtagende funksjoner

Teorem 12

La J være et åpent intervall og la I være et intervall som inneholder alle punkter i I og eventuelt et eller begge av endepunktene til J. Anta at f er kontinuerlig på I og deriverbar på J.

- Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in J$ er f strengt voksende på I.
- Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in J$ er f strengt avtagende på I.
- Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in J$ er f ikke-avtagende på I.
- Hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in J$ er f ikke-voksende på I.

Bevis for teorem 12

Bevis for teorem 12

Anta at $x_1, x_2 \in I$ og $x_2 > x_1$.

Bevis for teorem 12

Anta at $x_1, x_2 \in I$ og $x_2 > x_1$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Bevis for teorem 12

Anta at $x_1, x_2 \in I$ og $x_2 > x_1$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Da $x_2 - x_1 > 0$ har $f'(c)$ samme fortegn som $f(x_2) - f(x_1)$.

Bevis for teorem 12

Anta at $x_1, x_2 \in I$ og $x_2 > x_1$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Da $x_2 - x_1 > 0$ har $f'(c)$ samme fortegn som $f(x_2) - f(x_1)$. Alle 4 konklusjoner følger herav.

Eksempel 2

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.
Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$. Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 1$, og at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $x \in (0, 1)$, og at $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$. Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 1$, og at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $x \in (0, 1)$, og at $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

Det følger at f er strengt avtagende på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, 1]$ og strengt voksende på intervallet $[1, \infty)$.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$. Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 1$, og at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $x \in (0, 1)$, og at $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

Det følger at f er strengt avtagende på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, 1]$ og strengt voksende på intervallet $[1, \infty)$.

Derfor har f et minimum i $x = 1$.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$. Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 1$, og at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $x \in (0,1)$, og at $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

Det følger at f er strengt avtagende på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0,1]$ og strengt voksende på intervallet $[1, \infty)$.

Derfor har f et minimum i $x = 1$. Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ har f intet maksimum.

Eksempel 2

La $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Da er $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$. Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 1$, og at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $x \in (0, 1)$, og at $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

Det følger at f er strengt avtagende på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, 1]$ og strengt voksende på intervallet $[1, \infty)$.

Derfor har f et minimum i $x = 1$. Da $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ har f intet maksimum.

Merk at selvom $x = 0$ er et kritisk punkt har f hverken maksimum eller minimum i $x = 0$.

Konstante funksjoner

Konstante funksjoner

Husk at hvis I er et intervall så kalles et punkt i I som ikke er et endepunkt for et *indre punkt*.

Konstante funksjoner

Husk at hvis I er et intervall så kalles et punkt i I som ikke er et endepunkt for et *indre punkt*.

Teorem 13

Hvis f er kontinuerlig på et intervall I og $f'(x) = 0$ for alle indre punkter i I, da er f konstant på I (dvs. det finnes en konstant C slik at $f(x) = C$ for alle $x \in I$).

Bevis for teorem 13

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

La $x \in I$.

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

La $x \in I$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en c mellom x_0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

La $x \in I$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en c mellom x_0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $c \neq x$ og $c \in x_0$ er c et indre punkt i I, og derfor er $f'(c) = 0$.

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

La $x \in I$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en c mellom x_0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $c \neq x$ og $c \in x_0$ er c et indre punkt i I, og derfor er $f'(c) = 0$.

Det følger at $f(x) = f(x_0) = C$.

Bevis for teorem 13

Velg et punkt $x_0 \in I$ og la $C = f(x_0)$.

La $x \in I$. Det følger av middelverdisetningen at det finnes en c mellom x_0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $c \neq x$ og $c \in x_0$ er c et indre punkt i I, og derfor er $f'(c) = 0$.

Det følger at $f(x) = f(x_0) = C$.

Dette viser at $f(x) = C$ for alle $x \in I$.

Den generaliserte middelverdisetningen

Den generaliserte middelverdisetningen

Teorem 16: Den generaliserte middelverdisetningen

Anta at funksjonene f og g er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Hvis $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$ er $g(a) \neq g(b)$ og det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bevis for teorem 16

Bevis for teorem 16

Da $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$ følger det av middelverdisetningen at $g(a) \neq g(b)$.

Bevis for teorem 16

Da $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$ følger det av middelverdisetningen at $g(a) \neq g(b)$.

La

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big).$$

Bevis for teorem 16

Da $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$ følger det av middelverdisetningen at $g(a) \neq g(b)$.

La

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big).$$

Da er $h(a) = h(b) = 0$, og da h er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b) følger det av Rolles teorem at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $h'(c) = 0$.

Bevis for teorem 16

Da $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$ følger det av middelverdisetningen at $g(a) \neq g(b)$.

La

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big).$$

Da er $h(a) = h(b) = 0$, og da h er kontinuerlig på det lukket intervallet $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b) følger det av Rolles teorem at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $h'(c) = 0$. Da $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$ følger det at

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Implisitt derivasjon

Implisitt derivasjon

Vi kan finne stigningstallet til grafen til en funksjon ved å finne den deriverte til funksjonen, men ikke alle kurver er grafer til funksjoner.

Implisitt derivasjon

Vi kan finne stigningstallet til grafen til en funksjon ved å finne den deriverte til funksjonen, men ikke alle kurver er grafer til funksjoner.

Generelt er en kurve grafen til en likning i to variable.

Implisitt derivasjon

Vi kan finne stigningstallet til grafen til en funksjon ved å finne den deriverte til funksjonen, men ikke alle kurver er grafer til funksjoner.

Generelt er en kurve grafen til en likning i to variable. En slik likning kan skrives på formen $F(x, y) = 0$ der F er en funksjon i to variable.

Implisitt derivasjon

Vi kan finne stigningstallet til grafen til en funksjon ved å finne den deriverte til funksjonen, men ikke alle kurver er grafer til funksjoner.

Generelt er en kurve grafen til en likning i to variable. En slik likning kan skrives på formen $F(x, y) = 0$ der F er en funksjon i to variable.

For eksempel er sirkelen med sentrum i origo og radius 5 grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (så $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ i dette tilfellet).

Implisitt derivasjon

Noen ganger kan vi løse likningen $F(x, y) = 0$ og finne en eksplisitt formel for y, men det er ikke alltid tilfellet.

Implisitt derivasjon

Noen ganger kan vi løse likningen $F(x, y) = 0$ og finne en eksplisitt formel for y, men det er ikke alltid tilfellet.

Hvis vi ikke kan finne en eksplisitt formel for y kan vi i noen tilfelle likevel finne en formel for $\frac{dy}{dx}$ ved å bruke *implisitt derivasjon*.

Implisitt derivasjon

Noen ganger kan vi løse likningen $F(x, y) = 0$ og finne en eksplisitt formel for y, men det er ikke alltid tilfellet.

Hvis vi ikke kan finne en eksplisitt formel for y kan vi i noen tilfelle likevel finne en formel for $\frac{dy}{dx}$ ved å bruke *implisitt derivasjon*.

Ideen er å anta at y er en funksjon av x med derivert $\frac{dy}{dx}$ eller y' og så derivere likningen $F(x, y) = 0$ med hensyn på x.

Eksempel 2.9.2

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Denne likningen derivere vi med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25.$$

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Denne likningen derivere vi med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25.$$

I følge kjerneregelen er $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$, og da 25 er en konstant er $\frac{d}{dx}25 = 0$.

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Denne likningen derivere vi med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25.$$

I følge kjerneregelen er $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$, og da 25 er en konstant er $\frac{d}{dx}25 = 0$. Vi har altså at

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Denne likningen derivere vi med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25.$$

I følge kjerneregelen er $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$, og da 25 er en konstant er $\frac{d}{dx}25 = 0$. Vi har altså at

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Det følger at for $y \neq 0$ er $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.

Eksempel 2.9.2

La oss finne stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$.

Sirkelen er grafen til likningen $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Denne likningen derivere vi med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25.$$

I følge kjerneregelen er $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$, og da 25 er en konstant er $\frac{d}{dx}25 = 0$. Vi har altså at

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Det følger at for $y \neq 0$ er $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$. Så stigningstallet til sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ i punktet $(3, -4)$ er $\frac{3}{4}$.

Eksempel 2.9.5

Eksempel 2.9.5

La oss vise at kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre vinkelrett (for letthets skyld antar vi at $b \neq 0$).

Eksempel 2.9.5

La oss vise at kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre vinkelrett (for letthets skyld antar vi at $b \neq 0$).

Hvis vi deriverer $x^2 - y^2 = a$ med hensyn på x får vi $2x - 2yy' = 0$ som gir $y' = x/y$ (hvis $y \neq 0$), så stigningstallet til kurven $x^2 - y^2 = a$ i et punkt (x_0, y_0) der $y_0 \neq 0$ er x_0/y_0.

Eksempel 2.9.5

La oss vise at kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre vinkelrett (for letthets skyld antar vi at $b \neq 0$).

Hvis vi deriverer $x^2 - y^2 = a$ med hensyn på x får vi $2x - 2yy' = 0$ som gir $y' = x/y$ (hvis $y \neq 0$), så stigningstallet til kurven $x^2 - y^2 = a$ i et punkt (x_0, y_0) der $y_0 \neq 0$ er x_0/y_0.

Hvis vi deriverer $xy = b$ med hensyn på x får vi $xy' + y = 0$ som gir $y' = -y/x$ (hvis $x \neq 0$), så stigningstallet til kurven $xy = b$ i et punkt (x_0, y_0) der $x_0 \neq 0$ er $-y_0/x_0$.

Eksempel 2.9.5

La oss vise at kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre vinkelrett (for letthets skyld antar vi at $b \neq 0$).

Hvis vi deriverer $x^2 - y^2 = a$ med hensyn på x får vi $2x - 2yy' = 0$ som gir $y' = x/y$ (hvis $y \neq 0$), så stigningstallet til kurven $x^2 - y^2 = a$ i et punkt (x_0, y_0) der $y_0 \neq 0$ er x_0/y_0.

Hvis vi deriverer $xy = b$ med hensyn på x får vi $xy' + y = 0$ som gir $y' = -y/x$ (hvis $x \neq 0$), så stigningstallet til kurven $xy = b$ i et punkt (x_0, y_0) der $x_0 \neq 0$ er $-y_0/x_0$.

Hvis kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre i et punkt (x_0, y_0) må $x_0 \neq 0$ og $y_0 \neq 0$ (ellers ville ikke $x_0 y_0 = b \neq 0$), så produktet av stigningstallene til de to kurvene ville være $\frac{x_0}{y_0}\frac{-y_0}{x_0} = -1$ i det punktet.

Eksempel 2.9.5

La oss vise at kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre vinkelrett (for letthets skyld antar vi at $b \neq 0$).

Hvis vi deriverer $x^2 - y^2 = a$ med hensyn på x får vi $2x - 2yy' = 0$ som gir $y' = x/y$ (hvis $y \neq 0$), så stigningstallet til kurven $x^2 - y^2 = a$ i et punkt (x_0, y_0) der $y_0 \neq 0$ er x_0/y_0.

Hvis vi deriverer $xy = b$ med hensyn på x får vi $xy' + y = 0$ som gir $y' = -y/x$ (hvis $x \neq 0$), så stigningstallet til kurven $xy = b$ i et punkt (x_0, y_0) der $x_0 \neq 0$ er $-y_0/x_0$.

Hvis kurvene $x^2 - y^2 = a$ og $xy = b$ skjærer hverandre i et punkt (x_0, y_0) må $x_0 \neq 0$ og $y_0 \neq 0$ (ellers ville ikke $x_0 y_0 = b \neq 0$), så produktet av stigningstallene til de to kurvene ville være $\frac{x_0}{y_0}\frac{-y_0}{x_0} = -1$ i det punktet. Altså vil de to kurvene stå vinkelrett på hverandre i det punktet.

Eksempel 3

Eksempel 3

La oss finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Eksempel 3

La oss finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Hvis vi deriverer $x^2 + 3y^2 = 2$ med hensyn på x får vi $2x + 6yy' = 0$ som gir $y' = \frac{-x}{3y}$ hvis $y \neq 0$.

Eksempel 3

La oss finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Hvis vi deriverer $x^2 + 3y^2 = 2$ med hensyn på x får vi $2x + 6yy' = 0$ som gir $y' = \frac{-x}{3y}$ hvis $y \neq 0$.

Det følger at

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \frac{-x}{3y} = \frac{-3y + 3xy'}{9y^2} = \frac{-3y - x^2/y}{9y^2} \\
&= \frac{-3y^2 - x^2}{9y^3} = \frac{-2}{9y^3}
\end{aligned}
$$

hvis $y \neq 0$.

Eksempel 3

La oss se hvordan vi kan bruke Maple til å finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Eksempel 3

La oss se hvordan vi kan bruke Maple til å finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Det første vi gjør er å derivere likningen $x^2 + 3y^2 = 2$:

$$diff\left(x^2 + 3\,y(x)^2 = 2, x\right);$$

$$2\,x + 6\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$$

Eksempel 3

La oss se hvordan vi kan bruke Maple til å finne y'' når $x^2 + 3y^2 = 2$ og $y \neq 0$.

Det første vi gjør er å derivere likningen $x^2 + 3y^2 = 2$:

$diff\left(x^2 + 3\,y(x)^2 = 2, x\right);$

$$2\,x + 6\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$$

Deretter finne vi y':

$solve(\mathbf{(1)}, diff(y(x), x));$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{x}{y(x)}$$

Eksempel 3

Vi deriverer så y'':

$diff((\mathbf{2}), x);$

$$-\frac{1}{3\,y(x)} + \frac{1}{3}\,\frac{x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)}{y(x)^2}$$

Eksempel 3

Vi deriverer så y'':

$diff((\mathbf{2}), x);$

$$-\frac{1}{3\,y(x)} + \frac{1}{3}\,\frac{x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{y(x)^2}$$

Vi innsetter så $y' = \frac{-x}{3y}$:

$subs(diff(y(x), x) = (\mathbf{2}), (\mathbf{3}));$

$$-\frac{1}{3\,y(x)} - \frac{1}{9}\,\frac{x^2}{y(x)^3}$$

Eksempel 3

Så forenkler vi:

$simplify((\mathbf{4}));$

$$-\frac{1}{9}\,\frac{x^2+3\,y(x)^2}{y(x)^3}$$

Eksempel 3

Så forenkler vi:

$simplify((\mathbf{4}));$

$$-\frac{1}{9}\,\frac{x^2+3\,y(x)^2}{y(x)^3}$$

Og insetter $x^2 + 3y^2 = 2$:

$subs\left(x^2 + 3\,y(x)^2 = 2, (\mathbf{5})\right);$

$$-\frac{2}{9\,y(x)^3}$$