NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 8

Derivasjon

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Kjerneregelen

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Kjerneregelen
2. Deriverte til trigonometriske funksjoner.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Kjerneregelen
2. Deriverte til trigonometriske funksjoner.
3. Deriverte av høyere orden.

Sammensatte funksjoner

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner definere vi den *sammensatte funksjonen* $g \circ f$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (forutsatt at f er definert i punktet x og at g er definert i punktet $f(x)$).

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner definere vi den *sammensatte funksjonen* $g \circ f$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (forutsatt at f er definert i punktet x og at g er definert i punktet $f(x)$).

Eksempel: Hvis $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \sqrt{x-2}$ så er $(g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2-1)-2} = \sqrt{x^2-3}$ definert for $x \geq \sqrt{3}$ og $x \leq -\sqrt{3}$.

Kjerneregelen

Kjerneregelen

Teorem 6: Kjerneregelen

Anta at g er deriverbar i x og at f er deriverbar i $g(x)$. Da er den sammensatte funksjonen $f \circ g$ deriverbar i x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Kjerneregelen

Teorem 6: Kjerneregelen

Anta at g er deriverbar i x og at f er deriverbar i $g(x)$. Da er den sammensatte funksjonen $f \circ g$ deriverbar i x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Hvis vi lar $u = g(x)$ og $y = f(u)$, så er $y = (f \circ g)(x)$ og

$$\frac{dy}{dx} = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Bevis for Teorem 6

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$,

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$, så E er kontinuerlig i 0.

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$, så E er kontinuerlig i 0.

For alle k er $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$.

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$, så E er kontinuerlig i 0.

For alle k er $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$.

La $k = g(x+h) - g(x)$.

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$, så E er kontinuerlig i 0.

For alle k er $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$.

La $k = g(x+h) - g(x)$. Da er
$u + k = g(x) + g(x+h) - g(x) = g(x+h)$,

Bevis for Teorem 6

La $u = g(x)$ og la

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & \text{hvis } k \neq 0. \end{cases}$$

Da er $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$, så E er kontinuerlig i 0.

For alle k er $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$.

La $k = g(x+h) - g(x)$. Da er
$u + k = g(x) + g(x+h) - g(x) = g(x+h)$, og

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) - f(g(x)) &= f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k \\ &= (f'(g(x)) + E(k))(g(x+h) - g(x)). \end{aligned}$$

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$.

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$. Dessuten er g kontinuerlig i 0,

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$. Dessuten er g kontinuerlig i 0, så $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$.

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$. Dessuten er g kontinuerlig i 0, så $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$.

Da E er kontinuerlig i 0,

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$. Dessuten er g kontinuerlig i 0, så $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$.

Da E er kontinuerlig i 0, er $\lim_{h\to 0} E(k) = \lim_{k\to 0} E(k) = E(0) = 0$.

Bevis for Teorem 6

Da g er deriverbar i x, er $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$. Dessuten er g kontinuerlig i 0, så $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$.

Da E er kontinuerlig i 0, er $\lim_{h\to 0} E(k) = \lim_{k\to 0} E(k) = E(0) = 0$.

Følgelig er

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (f'(g(x)) + E(k)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= (f'(g(x)) + 0) g'(x) = f'(g(x)) g'(x).
\end{aligned}
$$

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Anta at u er deriverbar i x.

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Anta at u er deriverbar i x. Da er

1. $\dfrac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\dfrac{du}{dx}$,

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Anta at u er deriverbar i x. Da er

1. $\dfrac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\dfrac{du}{dx}$,
2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{-1}{u^2}\dfrac{du}{dx}$ (forutsatt at $u(x) \neq 0$),

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Anta at u er deriverbar i x. Da er

1. $\dfrac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\dfrac{du}{dx}$,
2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{-1}{u^2}\dfrac{du}{dx}$ (forutsatt at $u(x) \neq 0$),
3. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\dfrac{du}{dx}$ (forutsatt at $u(x) \neq 0$),

Kjerneregelen og de andre derivasjonsregeler

Anta at u er deriverbar i x. Da er

1. $$\frac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\frac{du}{dx},$$
2. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{dx} \text{ (forutsatt at } u(x) \neq 0\text{)},$$
3. $$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx} \text{ (forutsatt at } u(x) \neq 0\text{)},$$
4. $$\frac{d}{dx}|u| = \frac{u}{|u|}\frac{du}{dx} \text{ (forutsatt at } u(x) \neq 0\text{)}.$$

Eksempel 1

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(7x-3)^{10} &= 10(7x-3)^9\frac{d}{dx}(7x-3)\\ &= 10(7x-3)^9 7 = 70(7x-3)^9.\end{aligned}$$

Eksempel 2

Eksempel 2

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4}\\
&=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}\frac{d}{dx}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}\left(3+\frac{-3}{(2x+1)^4}\frac{d}{dx}(2x+1)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{2x+1}\right)^{-3/4}\left(3-\frac{6}{(2x+1)^4}\right)\\
&=\frac{3}{4}\left(3x+\frac{1}{2x+1}\right)^{-3/4}\left(1-\frac{2}{(2x+1)^4}\right)
\end{aligned}
$$

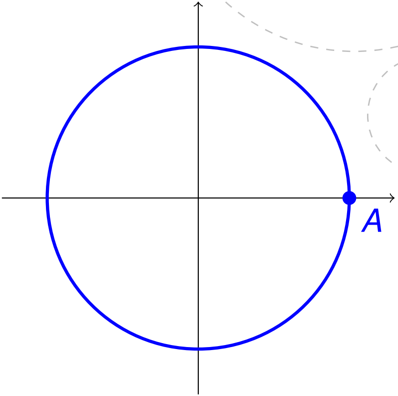
$\sin x$ **og** $\cos x$

$\sin x$ **og** $\cos x$

Vi vil, hvis ikke annet er skrevet, måle vinkler i *radianer*.

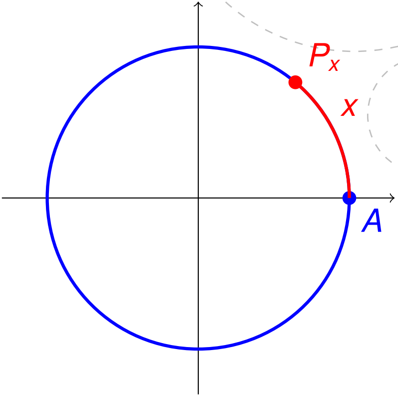
sin x **og** cos x

Vi vil, hvis ikke annet er skrevet, måle vinkler i *radianer*. La C være enhetssirkelen (sirkelen med radius lik 1 og sentrum i origo) og la $A = (1, 0)$.



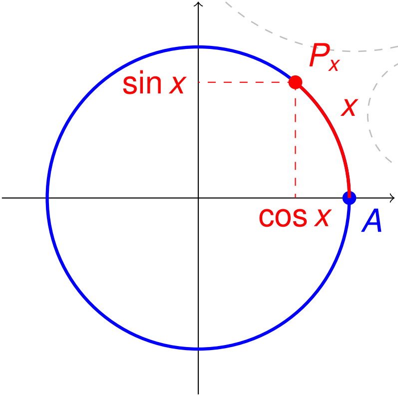
$\sin x$ og $\cos x$

Vi vil, hvis ikke annet er skrevet, måle vinkler i *radianer*. La C være enhetssirkelen (sirkelen med radius lik 1 og sentrum i origo) og la $A = (1, 0)$.
For $x \in \mathbb{R}$, la vi P_x være punktet på C som har avstand $|x|$ til A målt langs C i retning mot uret hvis $x > 0$ og med uret hvis $x < 0$ ($P_t = A$ hvis $t = 0$).



$\sin x$ **og** $\cos x$

Vi vil, hvis ikke annet er skrevet, måle vinkler i *radianer*. La C være enhetssirkelen (sirkelen med radius lik 1 og sentrum i origo) og la $A = (1, 0)$.
For $x \in \mathbb{R}$, la vi P_x være punktet på C som har avstand $|x|$ til A målt langs C i retning mot uret hvis $x > 0$ og med uret hvis $x < 0$ ($P_t = A$ hvis $t = 0$).
Da er $\cos x$ første koordinaten til P_x og $\sin x$ er annen koordinaten til P_x.



De deriverte til $\sin x$ og $\cos x$

De deriverte til $\sin x$ og $\cos x$

Teorem 9

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

De deriverte til $\sin x$ og $\cos x$

Teorem 9

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

Teorem 10

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

Bevis for Teorem 9

Bevis for Teorem 9

Det er velkjent at $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ og $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$.

Bevis for Teorem 9

Det er velkjent at $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ og $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$.

Det følger at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \sin y = 0.$$

Bevis for Teorem 9

Det er velkjent at $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ og $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$.

Det følger at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\sin y = 0.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h} = \cos x.
\end{aligned}$$

Bevis for Teorem 10

Bevis for Teorem 10

Det er velkjent at $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ og $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

Bevis for Teorem 10

Det er velkjent at $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ og $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

Det følger at

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin(\pi/2 - x) = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x.$$

Eksempel 3

Eksempel 3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(\sqrt{x})\right) &= 2x\sin(\sqrt{x}) + x^2\left(\cos(\sqrt{x})\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= 2x\sin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}x^{3/2}\left(\cos(\sqrt{x})\right).\end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(\sqrt{x})\right) = 2x\sin(\sqrt{x}) + x^2(\cos(\sqrt{x}))\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= 2x\sin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}x^{3/2}(\cos(\sqrt{x})).$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - (-\cos x)\cos x}{(1-\sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x + 1}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

De deriverte til $\tan x$ og $\cot x$

De deriverte til $\tan x$ og $\cot x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

De deriverte til $\tan x$ og $\cot x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Det følger at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

De deriverte til $\tan x$ og $\cot x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

De deriverte til $\tan x$ og $\cot x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

Eksempel 4

Eksempel 4

$$\frac{d}{dx}(3x + \cot(x/2)) = 3 + (-\csc^2(x/2))\frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}\csc^2(x/2).$$

De deriverte til $\sec x$ og $\csc x$

De deriverte til $\sec x$ og $\csc x$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

De deriverte til $\sec x$ og $\csc x$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = -\sin x \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

De deriverte til $\sec x$ og $\csc x$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = -\sin x \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

De deriverte til $\sec x$ og $\csc x$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = -\sin x \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$. Det følger at

$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x} = \cos x \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$

Eksempel 5

Eksempel 5

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\sin(2x)}\right) = \frac{d}{dx}(3\csc(2x)) = -6\csc(2x)\cot(2x).$$

Eksempel 6

Eksempel 6

La oss finne tangenten og normalen til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$.

Eksempel 6

La oss finne tangenten og normalen til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$.

Stigningstallet til tangenten til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$ er

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(x\pi/4)\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(\pi/4) = \frac{\pi}{4\cos^2(\pi/4)} = \frac{\pi}{2}$$

Eksempel 6

La oss finne tangenten og normalen til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$.

Stigningstallet til tangenten til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$ er

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(x\pi/4)\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(\pi/4) = \frac{\pi}{4\cos^2(\pi/4)} = \frac{\pi}{2}$$

så tangenten er linjen $y = \frac{\pi}{2}(x-1)+1 = \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Eksempel 6

La oss finne tangenten og normalen til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$.

Stigningstallet til tangenten til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$ er

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(x\pi/4)\Big|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(\pi/4) = \frac{\pi}{4\cos^2(\pi/4)} = \frac{\pi}{2}$$

så tangenten er linjen $y = \frac{\pi}{2}(x-1)+1 = \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Stigningstallet til normalen er $\frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{\pi}$,

Eksempel 6

La oss finne tangenten og normalen til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$.

Stigningstallet til tangenten til kurven $y = \tan(x\pi/4)$ i punktet $(1, 1)$ er

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(x\pi/4)\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2(\pi/4) = \frac{\pi}{4\cos^2(\pi/4)} = \frac{\pi}{2}$$

så tangenten er linjen $y = \frac{\pi}{2}(x-1)+1 = \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Stigningstallet til normalen er $\frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{\pi}$, så normalen er linjen $y = \frac{-2}{\pi}(x-1)+1 = \frac{-2}{\pi}x + 1 + \frac{2}{\pi}$.

Deriverte av høyere orden

Deriverte av høyere orden

Hvis den deriverte til funksjonen f også er deriverbar, kan man definere den *andrederiverte* (eller dobbeltderiverte) til f som den deriverte til den førstederiverte.

Deriverte av høyere orden

Hvis den deriverte til funksjonen f også er deriverbar, kan man definere den *andrederiverte* (eller dobbeltderiverte) til f som den deriverte til den førstederiverte.

Vi bruker følgende notasjon for den andrederiverte

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = D_x^2 f(x) = D_x^2 y.$$

Tilsvarende kan man definere den tredje og fjerde definerte, og så videre.

Deriverte av høyere orden

Hvis den deriverte til funksjonen f også er deriverbar, kan man definere den *andrederiverte* (eller dobbeltderiverte) til f som den deriverte til den førstederiverte.

Vi bruker følgende notasjon for den andrederiverte

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = D_x^2 f(x) = D_x^2 y.$$

Tilsvarende kan man definere den tredje og fjerde definerte, og så videre.

Vi bruker følgende notasjon for den *n-te deriverte*.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = D_x^n f(x) = D_x^n y.$$

Eksempel 7

Eksempel 7

La $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$.

Eksempel 7

La $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$.
Da er

$$f'(x) = 2x(1/2)(x^2+1)^{-1/2} = x(x^2+1)^{-1/2}.$$

Eksempel 7

La $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$.
Da er

$$f'(x) = 2x(1/2)(x^2+1)^{-1/2} = x(x^2+1)^{-1/2}.$$

Og

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2+1)^{-1/2} + x(2x)(-1/2)(x^2+1)^{-3/2} \\ &= (x^2+1-x^2)(x^2+1)^{-3/2} = (x^2+1)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Eksempel 7

La $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$.
Da er

$$f'(x) = 2x(1/2)(x^2+1)^{-1/2} = x(x^2+1)^{-1/2}.$$

Og

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2+1)^{-1/2} + x(2x)(-1/2)(x^2+1)^{-3/2} \\ &= (x^2+1-x^2)(x^2+1)^{-3/2} = (x^2+1)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Og

$$f^{(3)}(x) = 2x(-3/2)(x^2+1)^{-5/2} = -3x(x^2+1)^{-5/2}.$$

Eksempel 8

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.
Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$,

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Vi vil vise at det er tilfellet ved å bruke induksjon:

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Vi vil vise at det er tilfellet ved å bruke induksjon: For $n = 0$ er $f^n(x) = f(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Vi vil vise at det er tilfellet ved å bruke induksjon: For $n = 0$ er $f^n(x) = f(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.

Anta at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Vi vil vise at det er tilfellet ved å bruke induksjon: For $n = 0$ er $f^n(x) = f(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.

Anta at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$. Da er $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(-n-1)(1+x)^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!(1+x)^{-n-2}$.

Eksempel 8

La $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Da er $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ og $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

Det synes at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ (og $0! = 1$).

Vi vil vise at det er tilfellet ved å bruke induksjon: For $n = 0$ er $f^n(x) = f(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.

Anta at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$. Da er $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(-n-1)(1+x)^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!(1+x)^{-n-2}$.

Det følger da at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.