NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 7

Derivasjon

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Vesktfart.

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Vesktfart.
2. Tangenter.

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Vesktfart.
2. Tangenter.
3. Den deriverte til en funksjon.

Derivasjon

Denne uken skal vi begynne på tema 2 om derivasjon.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Vesktfart.
2. Tangenter.
3. Den deriverte til en funksjon.
4. Derivasjonsregler.

Vekstfart

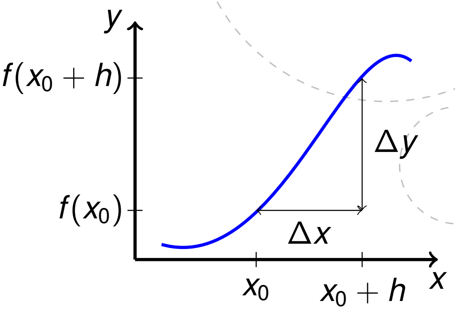
Vekstfart

La f være en funksjon og x_0 et punkt slik $f(x_0)$ er definert.

Vekstfart

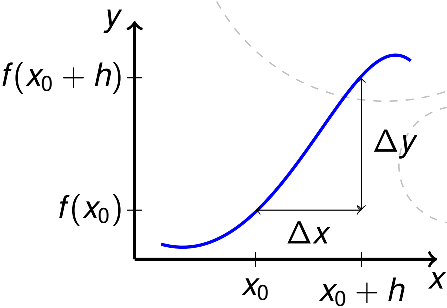
La f være en funksjon og x_0 et punkt slik $f(x_0)$ er definert. Den gjennomsnittlige vekstfarten til f i intervallet $[x_0, x_0 + h]$ er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Vekstfart

La f være en funksjon og x_0 et punkt slik $f(x_0)$ er definert. Den gjennomsnittlige vekstfarten til f i intervallet $[x_0, x_0 + h]$ er



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La vi h gå mot 0 får vi den momentane vekstfarten til f i punktet x_0

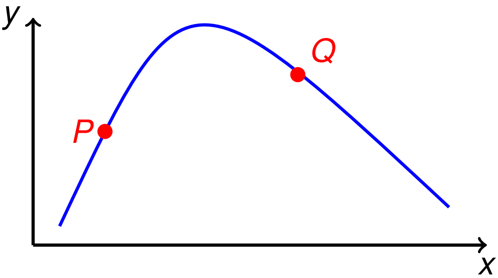
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(hvis grenseverdien eksisterer).

Tangenter

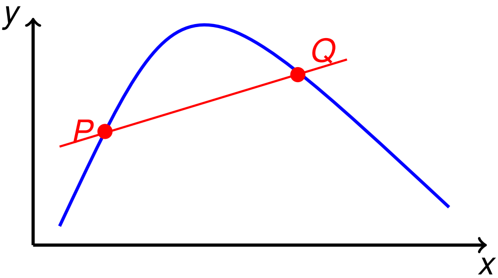
Tangenter

La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Tangenter

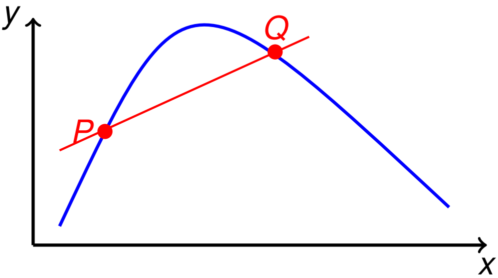
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*.

Tangenter

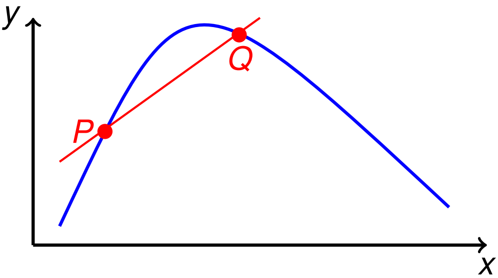
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

Tangenter

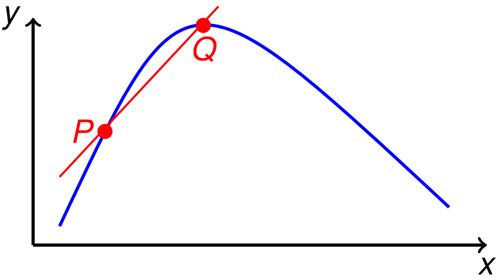
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

Tangenter

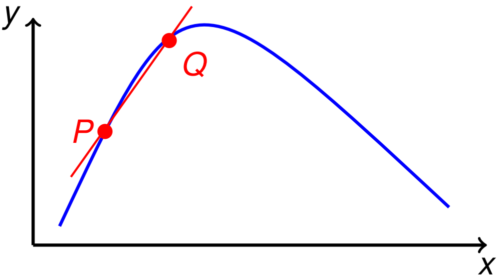
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

Tangenter

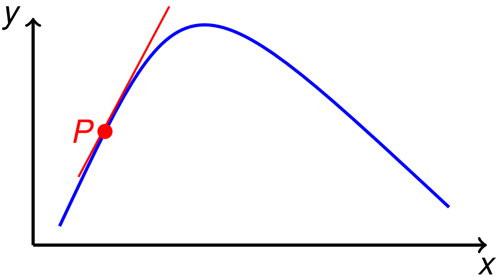
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

Tangenter

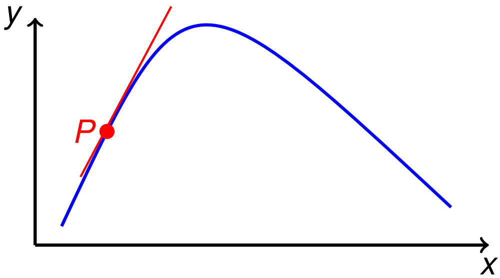
La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.



Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

Tangenter

La P og Q være to punkter på grafen til en funksjon f.

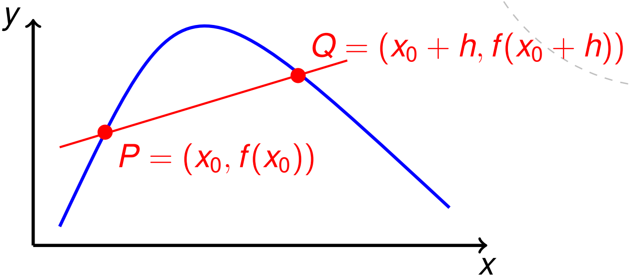


Linjen gjennom P og Q kalles en *sekant*. La vi Q nærme seg P vil sekanten nærme seg *tangenten* til grafen i punktet P.

For ytterligere illustrasjon av dette, se `http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/derivative_at_a_point.html`.

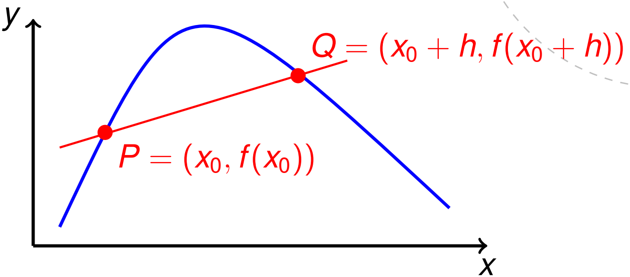
Tangenter

La $P = (x_0, f(x_0))$ og $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Tangenter

La $P = (x_0, f(x_0))$ og $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

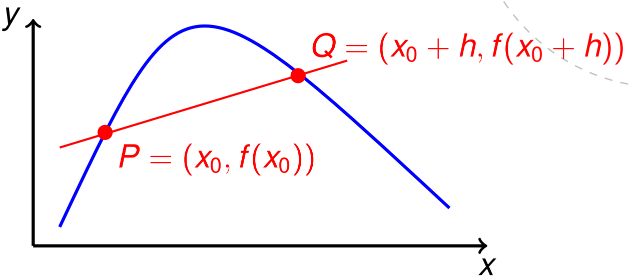


Stigningstallet til sektanten gjennom P og Q er da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tangenter

La $P = (x_0, f(x_0))$ og $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Stigningstallet til sektanten gjennom P og Q er da $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Det følger at stigningstallet til tangenten er $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (hvis grenseverdien eksisterer).

Ikke-vertikale tangenter

Ikke-vertikale tangenter

Vi definerer derfor tangenter på følgende måte:

Definisjon 1: Ikke-vertikale tangenter

Anta at funksjonen f er kontinuerlig i punktet $x = x_0$ og at grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m$$

eksisterer. Linjen $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ kalles da *tangenten* til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Eksempel 1

Eksempel 1

La $f(x) = x^2$ og $x_0 = 1$.

Eksempel 1

La $f(x) = x^2$ og $x_0 = 1$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2 + h = 2.$$

Eksempel 1

La $f(x) = x^2$ og $x_0 = 1$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2 + h = 2.$$

Det følger at likningen til tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ er $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

Eksempel 1

La oss illustrere dette ved hjelp av Maple:

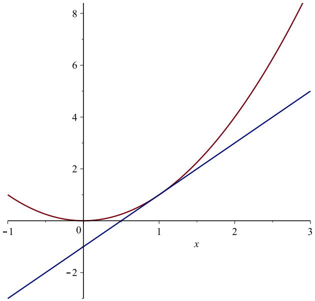
Eksempel 1

La oss illustrere dette ved hjelp av Maple:

$with(Student[Calculus1]):$
$Tangent(x^2, x = 1);$

$$2\,x - 1$$

$plot([x^2, 2\,x - 1], x = -1..3);$



Vertikale tangenter

Vertikale tangenter

Vi kan utvide definisjonen av tangenter for å tillate vertikale tangenter:

Vertikale tangenter

Vi kan utvide definisjonen av tangenter for å tillate vertikale tangenter:

Definition 2: Vertikale tangenter

Anta at funksjonen f er kontinuerlig i punktet $x = x_0$ og at

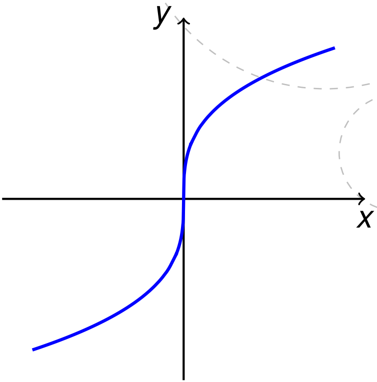
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty \text{ eller } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty.$$

Linjen $x = x_0$ kalles da *tangenten* til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.
Hvis grenseverdien ikke eksistere og $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \pm\infty$, har grafen til f ingen tangent i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Eksempel 2

Eksempel 2

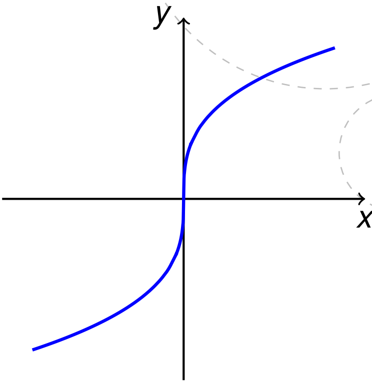
La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ og $x_0 = 0$.



Eksempel 2

La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ og $x_0 = 0$.
Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

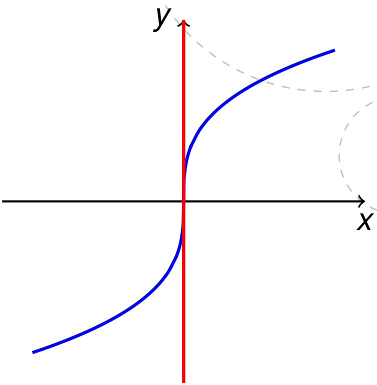


Eksempel 2

La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ og $x_0 = 0$.
Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

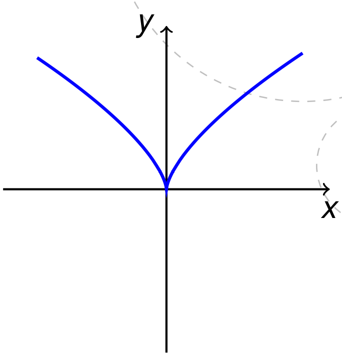
Det følger at linjen $x = 0$ er tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$.



Eksempel 3

Eksempel 3

La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{2/3}$ og $x_0 = 0$.



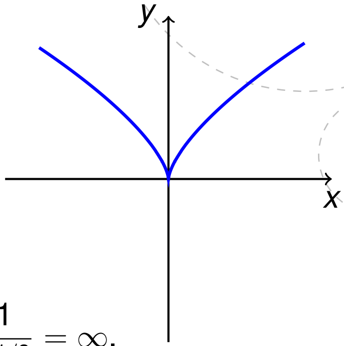
Eksempel 3

La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{2/3}$ og $x_0 = 0$. Da eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3}}{h}$$

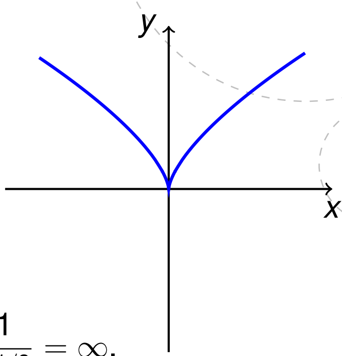
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

ikke, fordi $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{h^{1/3}} = -\infty$ og $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h^{1/3}} = \infty$.



Eksempel 3

La $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{2/3}$ og $x_0 = 0$. Da eksisterer grenseverdien



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{2/3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

ikke, fordi $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$ og $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty$.

Det følger at grafen til f ikke har en tangent i punktet $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$.

Stigningstallet til en kurve

Stigningstallet til en kurve

Definisjon 3: Stigningstallet til en kurve

- Stigningstallet til en kurve C i punktet P er stigningstallet til tangenten til C i punktet P (forutsatt at tangenten eksisterer).
- Spesielt har vi at stigningstallet til grafen til en funksjon f i punktet $(x_0, f(x_0))$ er $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ hvis grenseverdien eksisterer.

Eksempel 4

Eksempel 4

La oss finne stigningstallet til kurven $y = x/(3x + 2)$ i punktet $(-2, 1/2)$.

Eksempel 4

La oss finne stigningstallet til kurven $y = x/(3x+2)$ i punktet $(-2, 1/2)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3(-2+h)+2} - \frac{-2}{3(-2)+2}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3h-4} - \frac{-2}{-4}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4+2h-3h+4}{6h^2-8h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{6h^2-8h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{8-6h} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Eksempel 4

La oss finne stigningstallet til kurven $y = x/(3x+2)$ i punktet $(-2, 1/2)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3(-2+h)+2} - \frac{-2}{3(-2)+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3h-4} - \frac{-2}{-4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4+2h-3h+4}{6h^2-8h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{6h^2-8h}$$

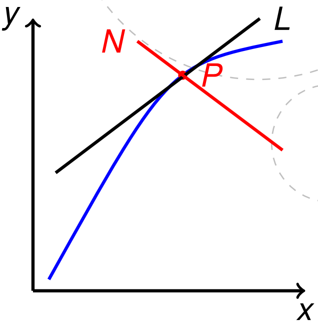
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{8-6h} = \frac{1}{8}$$

Så stigningstallet til kurven $y = x/(3x+2)$ i punktet $(-2, 1/2)$ er $1/8$.

Normalen til en kurve

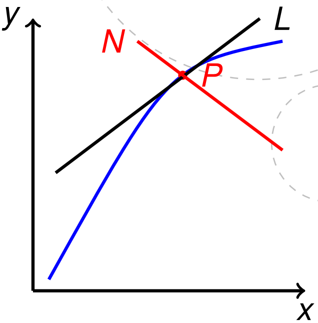
Normalen til en kurve

- Hvis en kurve C har en tangent L i et punkt P, kalles linjen N som går gjennom P og som står vinkelrett på L for *normalen* til C i punktet P.



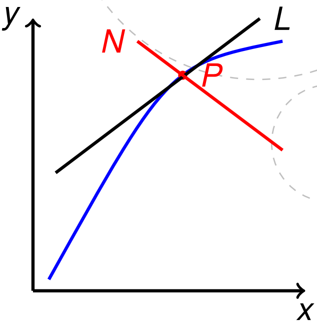
Normalen til en kurve

- Hvis en kurve C har en tangent L i et punkt P, kalles linjen N som går gjennom P og som står vinkelrett på L for *normalen* til C i punktet P.
- Hvis L er vertikal er N horisontal.



Normalen til en kurve

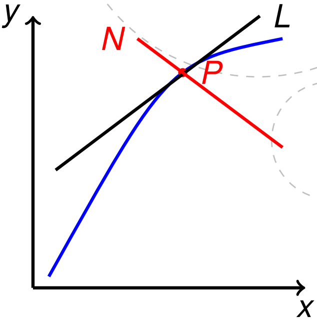
- Hvis en kurve C har en tangent L i et punkt P, kalles linjen N som går gjennom P og som står vinkelrett på L for *normalen* til C i punktet P.
- Hvis L er vertikal er N horisontal.
- Hvis L er horisontal er N vertikal.



Normalen til en kurve

- Hvis en kurve C har en tangent L i et punkt P, kalles linjen N som går gjennom P og som står vinkelrett på L for *normalen* til C i punktet P.
- Hvis L er vertikal er N horisontal.
- Hvis L er horisontal er N vertikal.
- Hvis L hverken er vertikal eller horisontal har N stigningstall

$$\frac{-1}{\text{stigningstallet til } L}.$$



Eksempel 5

Eksempel 5

La oss finne normalen til kurven $y = \sqrt{x}$ i punktet $(4, 2)$.

Eksempel 5

La oss finne normalen til kurven $y = \sqrt{x}$ i punktet $(4, 2)$.

Vi finner først stigningstallet til tangenten i punktet $(4, 2)$:

Eksempel 5

La oss finne normalen til kurven $y = \sqrt{x}$ i punktet $(4, 2)$.

Vi finner først stigningstallet til tangenten i punktet $(4, 2)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{4}$$

Eksempel 5

La oss finne normalen til kurven $y = \sqrt{x}$ i punktet $(4, 2)$.

Vi finner først stigningstallet til tangenten i punktet $(4, 2)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

Det følger at stigningstallet til normalen er $\frac{-1}{1/4} = -4$.

Eksempel 5

La oss finne normalen til kurven $y = \sqrt{x}$ i punktet $(4, 2)$.

Vi finner først stigningstallet til tangenten i punktet $(4, 2)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

Det følger at stigningstallet til normalen er $\frac{-1}{1/4} = -4$.

Så likningen til normalen i punktet $(4, 2)$ er
$y = -4(x-4) + 2 = -4x + 18$.

Den deriverte

Den deriverte

Så langt har vi bare sett på stigningstallet til tangenten til grafen til en funksjon (eller den momentane vekstfarten til en funksjon) en punkt om gangen, men da stigningstallet avhenger av i hvilket punkt vi ser på tangenten, blir stigningstallet til tangenten en funksjon av punktet.

For en illustrasjon av dette, se `http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/derivative_as_a_function.html`.

Den deriverte

Så langt har vi bare sett på stigningstallet til tangenten til grafen til en funksjon (eller den momentane vekstfarten til en funksjon) en punkt om gangen, men da stigningstallet avhenger av i hvilket punkt vi ser på tangenten, blir stigningstallet til tangenten en funksjon av punktet.

For en illustrasjon av dette, se `http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/derivative_as_a_function.html`.

Denne funksjonen kaller vi den *deriverte*.

Den deriverte

Definition 4: Den deriverte

Den *deriverte* til en funksjon f er funksjonen f' definert ved at

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for de x hvor grenseverdien eksisterer.

Den deriverte

Definition 4: Den deriverte

Den *deriverte* til en funksjon f er funksjonen f' definert ved at

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for de x hvor grenseverdien eksisterer.

Hvis $f'(a)$ eksisterer sier vi at f er *deriverbar* i a.

Eksempel 6

Eksempel 6

La $f(x) = x^2$.

Eksempel 6

La $f(x) = x^2$. Da er

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x
\end{aligned}
$$

for alle x.

Eksempel 6

La $f(x) = x^2$. Da er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

for alle x.

f er derfor deriverbar i alle x.

Eksempel 6

La oss illustrere dette ved hjelp av Maple:

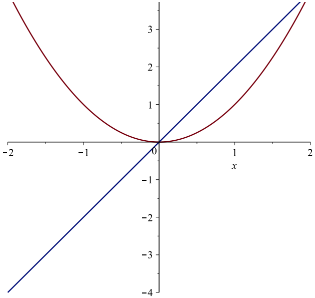
Eksempel 6

La oss illustrere dette ved hjelp av Maple:

$diff(x^2, x);$

$$2\,x$$

$plot([x^2, 2\,x], x = -2..2);$



Eksempel 7

Eksempel 7

Let $g(x) = |x|$.

Eksempel 7

Let $g(x) = |x|$. For $x > 0$ er

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

Eksempel 7

Let $g(x) = |x|$. For $x > 0$ er

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

og for $x < 0$ er

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1.$$

Eksempel 7

Da

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

Eksempel 7

Da

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

og

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

Eksempel 7

Da

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

og

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

eksisterer $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ ikke, og g er derfor ikke deriverbar i 0.

Eksempel 7

Funksjonen $g(x) = |x|$ er altså deriverbar for alle $x \neq 0$ og ikke deriverbar for $x = 0$, og den deriverte er

$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Høyre og venstre deriverbare funksjoner

Høyre og venstre deriverbare funksjoner

Vi sier at en funksjon f er *høyre deriverbar* i et punkt $x = a$ dersom

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer.

Høyre og venstre deriverbare funksjoner

Vi sier at en funksjon f er *høyre deriverbar* i et punkt $x = a$ dersom

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer.

Vi sier at en funksjon f er *venstre deriverbar* i et punkt $x = a$ dersom

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer.

Deriverbare funksjoner

Deriverbare funksjoner

- En funksjon f er *deriverbar* på et intervall (a, b) (der $a < b$) dersom f er deriverbar i alle $x \in (a, b)$.

Deriverbare funksjoner

- En funksjon f er *deriverbar* på et intervall (a, b) (der $a < b$) dersom f er deriverbar i alle $x \in (a, b)$.
- En funksjon f er *deriverbar* på et intervall $[a, b]$ (der $a < b$) dersom f er deriverbar i alle $x \in (a, b)$, venstre deriverbar i b og høyre deriverbar i a.

Eksempel 7

Eksempel 7

Funksjonen $g(x) = |x|$ er høyre og venstre deriverbar i 0, men ikke deriverbar i 0 (fordi $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h}$ og $\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h}$ begge eksisterer, men er forskjellige).

Eksempel 7

Funksjonen $g(x) = |x|$ er høyre og venstre deriverbar i 0, men ikke deriverbar i 0 (fordi $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h}$ og $\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h}$ begge eksisterer, men er forskjellige).

g er derfor deriverbar på intervallet $(-\infty, 0]$ og på intervallet $[0, \infty)$, men ikke på intervallet $(-\infty, \infty)$.

Tangenter

Tangenter

Anta at $f'(x_0)$ er definert.

Tangenter

Anta at $f'(x_0)$ er definert.

Da er tangenten til f i punktet x_0 linjen
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Tangenter

Anta at $f'(x_0)$ er definert.

Da er tangenten til f i punktet x_0 linjen
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Merk at $f'(x_0)$ kan uttrykkes som en grenseverdi på to måter:

Tangenter

Anta at $f'(x_0)$ er definert.

Da er tangenten til f i punktet x_0 linjen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Merk at $f'(x_0)$ kan uttrykkes som en grenseverdi på to måter:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Eksempel 8

Eksempel 8

La $f(x) = ax + b$ der a og b er konstanter.

Eksempel 8

La $f(x) = ax + b$ der a og b er konstanter. Da er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a \end{aligned}$$

for alle x.

Eksempel 8

La $f(x) = ax + b$ der a og b er konstanter. Da er

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

for alle x.

Følgelig er tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$ linjen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = a(x - x_0) + ax_0 + b = ax + b = f(x)$.

Eksempel 8

La $f(x) = ax + b$ der a og b er konstanter. Da er

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

for alle x.

Følgelig er tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$ linjen $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) = a(x-x_0)+ax_0+b = ax+b = f(x)$. Altså er tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$ grafen til f selv.

Potensregelen

Potensregelen

Det følger av Eksempel 7 at hvis $f(x) = 1$ så er $f'(x) = 0$ (faktisk følger det at $f'(x) = 0$ hvis f er en konstant funksjon),

Potensregelen

Det følger av Eksempel 7 at hvis $f(x) = 1$ så er $f'(x) = 0$ (faktisk følger det at $f'(x) = 0$ hvis f er en konstant funksjon), og at $g'(x) = 1$ hvis $g(x) = x$.

Potensregelen

Det følger av Eksempel 7 at hvis $f(x) = 1$ så er $f'(x) = 0$ (faktisk følger det at $f'(x) = 0$ hvis f er en konstant funksjon), og at $g'(x) = 1$ hvis $g(x) = x$.

Vi har også set at $h'(x) = 2x$ hvis $h(x) = x^2$.

Potensregelen

Det følger av Eksempel 7 at hvis $f(x) = 1$ så er $f'(x) = 0$ (faktisk følger det at $f'(x) = 0$ hvis f er en konstant funksjon), og at $g'(x) = 1$ hvis $g(x) = x$.

Vi har også set at $h'(x) = 2x$ hvis $h(x) = x^2$.

Vi skal senere vise at vi for alle r har at $k'(x) = rx^{r-1}$ hvis $k(x) = x^r$.

Leibniz notasjon

Leibniz notasjon

Hvis $y = f(x)$ vil vi under tiden bruke følgende alternativ notasjon for den deriverte til f.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = D_x y = D_x f(x) = Df(x).$$

Leibniz notasjon

Hvis $y = f(x)$ vil vi under tiden bruke følgende alternativ notasjon for den deriverte til f.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = D_x y = D_x f(x) = Df(x).$$

For eksempel er $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ og $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{1/2} = \frac{1}{2}t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Leibniz notasjon

Hvis $y = f(x)$ vil vi under tiden bruke følgende alternativ notasjon for den deriverte til f.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = D_x y = D_x f(x) = Df(x).$$

For eksempel er $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ og $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{1/2} = \frac{1}{2}t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Hvis vi ønsker å spesifisere verdien til den deriverte i et punkt $x = x_0$ kan vi bruke følgende notasjon:

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0} = \left.y'\right|_{x=x_0} = \left.D_x y\right|_{x=x_0}$$

$$= D_x f(x_0) = Df(x_0).$$

Leibniz notasjon

Hvis $y = f(x)$ vil vi under tiden bruke følgende alternativ notasjon for den deriverte til f.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = D_x y = D_x f(x) = Df(x).$$

For eksempel er $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ og $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{1/2} = \frac{1}{2}t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Hvis vi ønsker å spesifisere verdien til den deriverte i et punkt $x = x_0$ kan vi bruke følgende notasjon:

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0} = \left.y'\right|_{x=x_0} = \left.D_x y\right|_{x=x_0}$$
$$= D_x f(x_0) = Df(x_0).$$

For eksempel er $\left.\frac{d}{dx}x^2\right|_{x=3} = \left.2x\right|_{x=3} = 6$.

Eksempel 9

Eksempel 9

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\Bigg|_{x=2} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h}{(2+h)^2+1} - \frac{2}{2^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{5h+4h^2+h^3} - \frac{2}{5h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5(2+h)-2(5+4h+h^2)}{5(5h+4h^2+h^3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h^2-3h}{5(5h+4h^2+h^3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h-3}{5(5+4h+h^2)} = -\frac{3}{25}.
\end{aligned}
$$

Differensialer

Differensialer

Anta at f er en deriverbar funksjon.

Differensialer

Anta at f er en deriverbar funksjon. Hvis vi lar $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ og $\Delta x = h$ så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Differensialer

Anta at f er en deriverbar funksjon. Hvis vi lar $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ og $\Delta x = h$ så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Hvis vi lar dy være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx på følgende måte

$$dy = f'(x)dx$$

så blir $\dfrac{dy}{dx}$ en egentlig kvotient.

Differensialer

Anta at f er en deriverbar funksjon. Hvis vi lar $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ og $\Delta x = h$ så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Hvis vi lar dy være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx på følgende måte

$$dy = f'(x)dx$$

så blir $\dfrac{dy}{dx}$ en egentlig kvotient.

dy og dx kalles *differensialer*.

Differensialer

Anta at f er en deriverbar funksjon. Hvis vi lar $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ og $\Delta x = h$ så er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Hvis vi lar dy være en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx på følgende måte

$$dy = f'(x)dx$$

så blir $\dfrac{dy}{dx}$ en egentlig kvotient.

dy og dx kalles *differensialer*.

Hvis for eksempel $y = x^2$ blir $dy = \dfrac{dy}{dx}dx = \dfrac{dx^2}{dx}dx = 2xdx$.

Deriverbare funksjoner er kontinuerlige

Deriverbare funksjoner er kontinuerlige

Teorem 1: Deriverbare funksjoner er kontinuerlige

Hvis en funksjon f er er deriverbar i x, så er f kontinuerlig i x.

Bevis for Teorem 1

Bevis for Teorem 1

Da f er deriverbar i x, eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Bevis for Teorem 1

Da f er deriverbar i x, eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Det følger at

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h = \lim_{h \to 0} f'(x) h = 0$$

Bevis for Teorem 1

Da f er deriverbar i x, eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Det følger at

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h = \lim_{h \to 0} f'(x) h = 0$$

og dermed at $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

Bevis for Teorem 1

Da f er deriverbar i x, eksisterer grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Det følger at

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h = \lim_{h \to 0} f'(x)h = 0$$

og dermed at $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$. Dvs. f er kontinuerlig i x.

Summereglen, differansereglen og faktorreglen

Summereglen, differansereglen og faktorreglen

Teorem 2: Summereglen, differansereglen og faktorreglen

Anta at funksjonene f og g er deriverbare i x og C er en konstant. Da er funksjonene $f+g$, $f-g$ og Cf deriverbare i x og

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
- $(Cf)'(x) = Cf'(x)$.

Bevis for Teorem 2

Bevis for Teorem 2

$$
\begin{aligned}
(f \pm g)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \pm g'(x)
\end{aligned}
$$

Bevis for Teorem 2

$$
\begin{aligned}
(f \pm g)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \pm g'(x)
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
(Cf)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Cf(x+h) - Cf(x)}{h} \\
= C \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Cf'(x).
\end{aligned}
$$

Produktregelen

Teorem 3: Produktregelen

Anta at funksjonene f og g er deriverbare i x. Da er funksjon fg deriverbar i x og

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis for Teorem 3

Bevis for Teorem 3

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

Resiprokregelen

Teorem 4: Resiprokregelen

Anta at funksjonen f deriverbar i x og $f(x) \neq 0$. Da er funksjonen $1/f$ deriverbar i x og

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Bevis for Teorem 4

Bevis for Teorem 4

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)}\right)\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \\
&= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}.
\end{aligned}$$

Kvotientregelen

Teorem 5: Kvotientregelen

Anta at funksjonene f og g er deriverbare i x og $g(x) \neq 0$. Da er funksjonen f/g deriverbar i x og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Bevis for Teorem 5

Bevis for Teorem 5

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}
$$

Eksempel 10

Eksempel 10

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}\right)$$
$$= \frac{(x^2+2)(x^3+1)((x^2+1)3x^2+2x(x^3+2))}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$\frac{-((x^2+2)3x^2+2x(x^3+1))(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2(x^2+1)(x^2+2)(x^3+1)+2x(x^2+2)(x^3+1)(x^3+2)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$- \frac{3x^2(x^2+1)(x^2+2)(x^3+2)+2x(x^2+1)(x^3+1)(x^3+2)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^2(x^2+1)(x^2+2)+2x(x^3+1)(x^3+2)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^6-9x^4-6x^2+2x^7+6x^4+4x}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{2x^7-3x^6-3x^4-6x^2+4x}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}$$

Eksempel 11

Eksempel 11

La oss finne alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.

Eksempel 11

La oss finne alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-2x) + 2x(4 - x^2) = 2x(4 - 2x^2).$$

Eksempel 11

La oss finne alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-2x) + 2x(4 - x^2) = 2x(4 - 2x^2).$$

Så kurven $y = x^2(4 - x^2)$ har en horisontal tangent i punktene $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{2}$.

Eksempel 11

La oss finne alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-2x) + 2x(4 - x^2) = 2x(4 - 2x^2).$$

Så kurven $y = x^2(4 - x^2)$ har en horisontal tangent i punktene $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{2}$.

$y|_{x=0} = 0$ og $y|_{\pm\sqrt{2}} = 4$.

Eksempel 11

La oss finne alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-2x) + 2x(4 - x^2) = 2x(4 - 2x^2).$$

Så kurven $y = x^2(4 - x^2)$ har en horisontal tangent i punktene $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{2}$.

$y|_{x=0} = 0$ og $y|_{\pm\sqrt{2}} = 4$.

Så $y = 0$ og $y = 4$ er alle horisontale linjer som er tangenter til kurven $y = x^2(4 - x^2)$.