NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Teknostart forelesning 6

Grenseverdier

Grenseverdier

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Grenseverdier

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. En formell definisjon av grenseverdier.

Grenseverdier

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. En formell definisjon av grenseverdier.
2. Kontinuerlige funksjoner.

Grenseverdier

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. En formell definisjon av grenseverdier.
2. Kontinuerlige funksjoner.
3. Egenskaper ved kontinuerlige funksjoner.

Den formelle definisjon av grenseverdier

Den formelle definisjon av grenseverdier

Vi har definert L til å være gresenverdien av $f(x)$ når x går mot a dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

Den formelle definisjon av grenseverdier

Vi har definert L til å være gresenverdien av $f(x)$ når x går mot a dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

I de fleste tilfellene fungerer den definisjonen uten problemer, men noen ganger må vi ha en mer presis definisjon for hva vil det egentlig si at vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a?

Den formelle definisjon av grenseverdier

Vi har definert L til å være gresenverdien av $f(x)$ når x går mot a dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

I de fleste tilfellene fungerer den definisjonen uten problemer, men noen ganger må vi ha en mer presis definisjon for hva vil det egentlig si at vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a?

Det betyr at vi for ethvert positivt tall ϵ kan sikre oss at $|f(x) - L| < \epsilon$ for alle x i nærheten av men ikke lik a, dvs. for alle x i en mengde på formen $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ der δ er et positiv tall.

Den formelle definisjon av grenseverdier

Vi introduserer derfor følgende definisjon:

Definisjon 8

Anta at $f(x)$ er definert i nærheten av a. Vi sier at *L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a* dersom følgende gjelder:

- For ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes det et tall $\delta > 0$ slik at $|f(x) - L| < \epsilon$ for alle x i mengden $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Eksempel 1

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$.

Vi har at $|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2|\,|x - 2|$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$.

Vi har at $|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$.

Hvis $x \in (2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$, så er $|x-2| < \delta$ og $|x+2| < 4 + \delta$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$.

Vi har at $|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$.

Hvis $x \in (2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$, så er $|x-2| < \delta$ og $|x+2| < 4+\delta$.

Så hvis $\delta \leq 1$ og $\delta \leq \epsilon/5$ (for eksempel $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$), så er $|x^2-4| = |x+2|\,|x-2| < 5(\epsilon/5) = \epsilon$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$.

Vi har at $|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$.

Hvis $x \in (2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$, så er $|x-2| < \delta$ og $|x+2| < 4 + \delta$.

Så hvis $\delta \leq 1$ og $\delta \leq \epsilon/5$ (for eksempel $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$), så er $|x^2 - 4| = |x+2|\,|x-2| < 5(\epsilon/5) = \epsilon$.

Dette viser at $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Eksempel 1

La oss bruke den formelle definisjonen til å vise at $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Vi må vise at det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|x^2 - 4| < \epsilon$ for alle x i mengden $(2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$.

Vi har at $|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2|\,|x - 2|$.

Hvis $x \in (2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$, så er $|x - 2| < \delta$ og $|x + 2| < 4 + \delta$.

Så hvis $\delta \le 1$ og $\delta \le \epsilon/5$ (for eksempel $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$), så er $|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2| < 5(\epsilon/5) = \epsilon$.

Dette viser at $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

(Vi kunne ha brukt en annen δ enn det vi valgte, for eksempel $\delta = \sqrt{4 + \epsilon} - 2$.)

Entydighet av grenser

Entydighet av grenser

Vi kan nå vise at grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a er entydig (hvis den eksisterer):

Entydighet av grenser

Vi kan nå vise at grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a er entydig (hvis den eksisterer):

Anta at $\lim_{x \to a} f(x) = L$ og at $\lim_{x \to a} f(x) = M$.

Entydighet av grenser

Vi kan nå vise at grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a er entydig (hvis den eksisterer):

Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og at $\lim_{x\to a} f(x) = M$. Vi ønsker at vise at $L = M$.

Entydighet av grenser

Vi kan nå vise at grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a er entydig (hvis den eksisterer):

Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og at $\lim_{x\to a} f(x) = M$. Vi ønsker at vise at $L = M$. Anta derfor at $L > M$ og la $\epsilon = (L - M)/2$. Da finnes $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 >$ slik at $|f(x) - L| < \epsilon$ når $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$, og $|f(x) - M| < \epsilon$ når $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$.

Entydighet av grenser

Vi kan nå vise at grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a er entydig (hvis den eksisterer):

Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og at $\lim_{x\to a} f(x) = M$. Vi ønsker at vise at $L = M$. Anta derfor at $L > M$ og la $\epsilon = (L - M)/2$. Da finnes $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 >$ slik at $|f(x) - L| < \epsilon$ når $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$, og $|f(x) - M| < \epsilon$ når $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$.

Hvis $|f(x) - L| < \epsilon$, så er $L - f(x) < \epsilon$, og $f(x) > L - \epsilon = L - (L - M)/2 = (L + M)/2$, og hvis $|f(x) - M| < \epsilon$, så er $f(x) - M < \epsilon$, og $f(x) < M + \epsilon = M + (L - M)/2 = (L + M)/2$.

Entydighet av grenser

Så hvis x både er i $(a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)$ og i $(a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$, så er $f(x)$ både større og mindre enn $(L+M)/2$.

Entydighet av grenser

Så hvis x både er i $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ og i $(a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$, så er $f(x)$ både større og mindre enn $(L + M)/2$. Det er selvfølgelig ikke mulig, så det kan ikke være tilfellet at $L > M$.

Entydighet av grenser

Så hvis x både er i $(a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)$ og i $(a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$, så er $f(x)$ både større og mindre enn $(L+M)/2$. Det er selvfølgelig ikke mulig, så det kan ikke være tilfellet at $L > M$.

På en lignende måte kan vi vise at det ikke kan være tilfellet at $L < M$.

Entydighet av grenser

Så hvis x både er i $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ og i $(a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$, så er $f(x)$ både større og mindre enn $(L + M)/2$. Det er selvfølgelig ikke mulig, så det kan ikke være tilfellet at $L > M$.

På en lignende måte kan vi vise at det ikke kan være tilfellet at $L < M$.

Altså må $L = M$.

Kontinuerlige funksjoner

Kontinuerlige funksjoner

Løst sagt er en funksjon kontinuerlig hvis funksjonverdien ikke endres i hop.

Kontinuerlige funksjoner

Løst sagt er en funksjon kontinuerlig hvis funksjonverdien ikke endres i hop. Dette svarer til at grafen til funksjonen er en sammenhengende kurve.

Kontinuerlige funksjoner

Løst sagt er en funksjon kontinuerlig hvis funksjonverdien ikke endres i hop. Dette svarer til at grafen til funksjonen er en sammenhengende kurve.

Vi vil nå gi en mer presis definisjon av kontinuitet.

Kontinuitet i et indre punkt

Vi begynner med å definere kontinuitet i et indre punkt.

Kontinuitet i et indre punkt

Vi begynner med å definere kontinuitet i et indre punkt.

Et punkt a i definisjonsmengden til en funksjon f kalles *et indre punkt* dersom det finnes et $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i intervallet $(a - c, a + c)$.

Kontinuitet i et indre punkt

Vi begynner med å definere kontinuitet i et indre punkt.

Et punkt a i definisjonsmengden til en funksjon f kalles *et indre punkt* dersom det finnes et $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i intervallet $(a - c, a + c)$.

Definisjon 4: Kontinuitet i et indre punkt

- Vi sier at f er *kontinuerlig* i et indre punkt a dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Kontinuitet i et indre punkt

Vi begynner med å definere kontinuitet i et indre punkt.

Et punkt a i definisjonsmengden til en funksjon f kalles *et indre punkt* dersom det finnes et $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i intervallet $(a - c, a + c)$.

Definisjon 4: Kontinuitet i et indre punkt

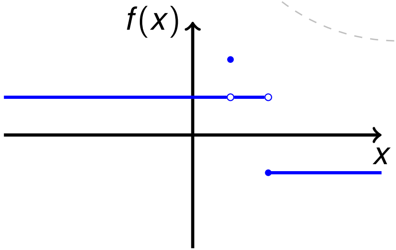
- Vi sier at f er *kontinuerlig* i et indre punkt a dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Hvis $\lim_{x \to a} f(x)$ ikke eksisterer eller ikke er lik $f(a)$ sier vi at f er *diskontinuerlig* i a.

Eksempel 2

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

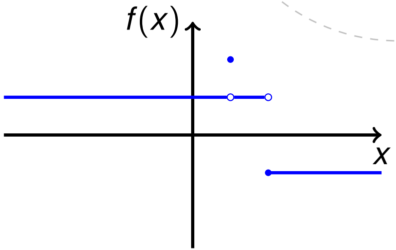


er ikke kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$,

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

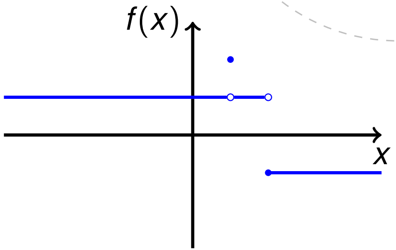


er ikke kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$, og ikke kontinuerlig i punktet $x = 2$ fordi $\lim_{x \to 2} f(x)$ ikke eksisterer (da $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$).

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$



er ikke kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$, og ikke kontinuerlig i punktet $x = 2$ fordi $\lim_{x\to 2} f(x)$ ikke eksisterer (da $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$).

Den er kontinuerlig i alle andre punkter.

Høyre og venstre kontinuitet

Høyre og venstre kontinuitet

For å kunne definere kontinuitet i et endepunkt introduserer vi følgende definisjoner.

Høyre og venstre kontinuitet

For å kunne definere kontinuitet i et endepunkt introduserer vi følgende definisjoner.

Definisjon 5: Høyre og venstre kontinuitet

Vi sier at f er *høyre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, og vi sier at f er *venstre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Høyre og venstre kontinuitet

For å kunne definere kontinuitet i et endepunkt introduserer vi følgende definisjoner.

Definisjon 5: Høyre og venstre kontinuitet

Vi sier at f er *høyre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, og vi sier at f er *venstre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Vi ser umiddelbart at følgende resultater gjelder:

Høyre og venstre kontinuitet

For å kunne definere kontinuitet i et endepunkt introduserer vi følgende definisjoner.

Definisjon 5: Høyre og venstre kontinuitet

Vi sier at f er *høyre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, og vi sier at f er *venstre kontinuerlig* i et punkt a dersom $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Vi ser umiddelbart at følgende resultater gjelder:

Teorem 5

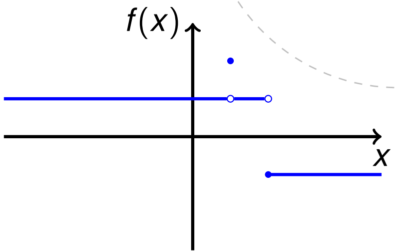
En funksjon f er kontinuerlig i et indre punkt a hvis og bare hvis f er både høyre og venstre kontinuerlig i a.

Eksempel 2

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

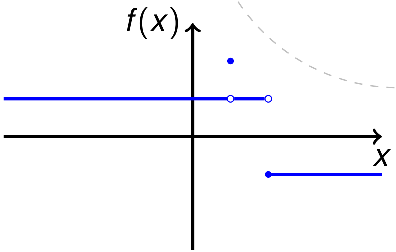


er ikke verken høyre eller venstre kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$.

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$



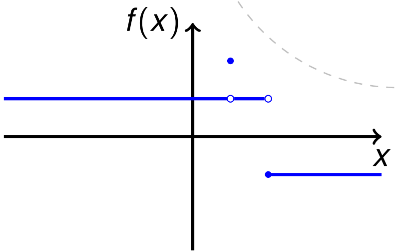
er ikke verken høyre eller venstre kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$.

f er høyre kontinuerlig i punktet $x = 2$ (fordi $\lim_{x\to a^+} = -1 = f(2)$), men ikke venstre kontinuerlig i punktet $x = 2$ (da $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \neq -1 = f(x)$).

Eksempel 2

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1 \\ 2 & \text{for } x = 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$



er ikke verken høyre eller venstre kontinuerlig i punktet $x = 1$ fordi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$.

f er høyre kontinuerlig i punktet $x = 2$ (fordi $\lim_{x\to a^+} = -1 = f(2)$), men ikke venstre kontinuerlig i punktet $x = 2$ (da $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \neq -1 = f(x)$).

f er både høyre og venstre kontinuerlig i alle andre punkter.

Kontinuitet i endepunkter

Kontinuitet i endepunkter

Vi kan nå definere kontinuitet i endepunkter.

Kontinuitet i endepunkter

Vi kan nå definere kontinuitet i endepunkter.

Hvis $a < b$ sier vi at

- a er det *venstre endepunktet* av intervallet $[a, b]$, og at
- b er det *høyre endepunktet* av intervallet $[a, b]$.

Kontinuitet i endepunkter

Vi kan nå definere kontinuitet i endepunkter.

Hvis $a < b$ sier vi at

- a er det *venstre endepunktet* av intervallet $[a, b]$, og at
- b er det *høyre endepunktet* av intervallet $[a, b]$.

Definisjon 6: Kontinuitet i endepunkter

Hvis $f(x)$ er definert på et intervall $[a, b]$ (der $a < b$) og det ikke finnes en $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle $x \in [a - c, b]$ sier vi at f kontinuerlig i det venstre endepunktet a dersom f er høyre kontinuerlig i a.

Kontinuitet i endepunkter

Definisjon 6: Kontinuitet i endepunkter

Hvis $f(x)$ er definert på et intervall $[a, b]$ (der $a < b$) og det ikke finnes en $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle $x \in [a, b + c]$ sier vi at f kontinuerlig i det høyre endepunktet b dersom f er venstre kontinuerlig i b.

Eksempel 3

Eksempel 3

Funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er definert på intervallet $[-2, 2]$.

Eksempel 3

Funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er definert på intervallet $[-2, 2]$.

- f er kontinuerlig i det venstre endepunktet $x = -2$ fordi f er høyre kontinuerlig i $x = -2$ (da $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$).

Eksempel 3

Funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er definert på intervallet $[-2, 2]$.

- f er kontinuerlig i det venstre endepunktet $x = -2$ fordi f er høyre kontinuerlig i $x = -2$ (da $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$).
- f er også kontinuerlig i det høyre endepunktet $x = 2$ fordi f er venstre kontinuerlig i $x = 2$ (da $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$).

Eksempel 3

Funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er definert på intervallet $[-2, 2]$.

- f er kontinuerlig i det venstre endepunktet $x = -2$ fordi f er høyre kontinuerlig i $x = -2$ (da $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$).
- f er også kontinuerlig i det høyre endepunktet $x = 2$ fordi f er venstre kontinuerlig i $x = 2$ (da $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$).
- f er dessuten kontinuerlig i ethvert indre punkt fordi $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ for alle $c \in (-2, 2)$.

Kontinuitet

Kontinuitet

Definisjon 7: Kontinuitet

- Vi sier at en funksjon f er kontinuerlig på et interval I dersom f er kontinuerlig i alle punkter $x \in I$.

Kontinuitet

Definisjon 7: Kontinuitet

- Vi sier at en funksjon f er kontinuerlig på et interval I dersom f er kontinuerlig i alle punkter $x \in I$.
- Vi sier at en funksjon f er *kontinuerlig* dersom f er kontinuerlig i alle punkter x hvor $f(x)$ er definert.

Eksempel 3

Eksempel 3

Vi har set at funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er kontinuerlig i ethvert punkt $x \in [-2, 2]$.

Eksempel 3

Vi har set at funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er kontinuerlig i ethvert punkt $x \in [-2, 2]$. Funksjonen f er derfor kontinuerlig på intervallet $[-2, 2]$.

Eksempel 3

Vi har set at funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er kontinuerlig i ethvert punkt $x \in [-2, 2]$. Funksjonen f er derfor kontinuerlig på intervallet $[-2, 2]$.

Da $f(x)$ bare er definert for $x \in [-2, 2]$ følger det at f er kontinuerlig.

Eksempel 4

Eksempel 4

La $g(x) = 1/x$.

Eksempel 4

La $g(x) = 1/x$. Da $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a > 0$ er g kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$.

Eksempel 4

La $g(x) = 1/x$. Da $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a > 0$ er g kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$.

Likeledes er $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a < 0$, så g er også kontinuerlig på intervallet $(-\infty, 0)$.

Eksempel 4

La $g(x) = 1/x$. Da $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a > 0$ er g kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$.

Likeledes er $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a < 0$, så g er også kontinuerlig på intervallet $(-\infty, 0)$.

Da $g(x)$ bare er definert for $x \neq 0$ følger det at g er kontinuerlig.

Eksempel 4

La $g(x) = 1/x$. Da $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a > 0$ er g kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$.

Likeledes er $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 1/x = 1/a = g(a)$ for alle $a < 0$, så g er også kontinuerlig på intervallet $(-\infty, 0)$.

Da $g(x)$ bare er definert for $x \neq 0$ følger det at g er kontinuerlig.

(Det kan kanskje synes litt rart siden $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ og $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$, men da $g(x)$ ikke er definert for $x = 0$ spiller det ingen rolle.)

Kontinuerlige funksjoner

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$ for enhver a, så ethvert polynom er kontinuerlig.

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$ for enhver a, så ethvert polynom er kontinuerlig.
2. Hvis $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer så er $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ forutsatt at $Q(a) \neq 0$, så enhver rasjonal funksjon er kontinuerlig.

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ for enhver a, så ethvert polynom er kontinuerlig.
2. Hvis $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer så er $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ forutsatt at $Q(a) \neq 0$, så enhver rasjonal funksjon er kontinuerlig.
3. Hvis $f(x) = x^{m/n}$ der m og n er heltall og $n > 0$, så er f kontinuerlig.

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ for enhver a, så ethvert polynom er kontinuerlig.
2. Hvis $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer så er $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ forutsatt at $Q(a) \neq 0$, så enhver rasjonal funksjon er kontinuerlig.
3. Hvis $f(x) = x^{m/n}$ der m og n er heltall og $n > 0$, så er f kontinuerlig.
4. $\cos(x)$, $\sin(x)$ og $\tan(x)$ er kontinuerlige.

Kontinuerlige funksjoner

Det er mange kontinuerlige funksjoner:

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ for enhver a, så ethvert polynom er kontinuerlig.
2. Hvis $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer så er $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ forutsatt at $Q(a) \neq 0$, så enhver rasjonal funksjon er kontinuerlig.
3. Hvis $f(x) = x^{m/n}$ der m og n er heltall og $n > 0$, så er f kontinuerlig.
4. $\cos(x)$, $\sin(x)$ og $\tan(x)$ er kontinuerlige.
5. Vi skal senere se på flere kontinuerlige funksjoner.

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

1. $f+g$ og $f-g$,

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

1. $f + g$ og $f - g$,
2. fg

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

1. $f + g$ og $f - g$,
2. fg
3. kf der k er en konstant.

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

1. $f + g$ og $f - g$,
2. fg
3. kf der k er en konstant.
4. f/g (forutsatt at $g(c) \neq 0$).

Kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner

Vi kan kombinere kontinuerlige funksjoner til nye kontinuerlige funksjoner:

Teorem 6

Anta at funksjonene f og g begge er definert på et intervall som inneholder punktet c og at de begge er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner kontinuerlige i c:

1. $f + g$ og $f - g$,
2. fg
3. kf der k er en konstant.
4. f/g (forutsatt at $g(c) \neq 0$).
5. $(f(x))^{1/n}$ der n er et naturlig tall (forutsatt at $f(c) > 0$ hvis n er et partall).

Sammensatte funksjoner

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner definere vi den *sammensatte funksjonen* $g \circ f$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (forutsatt at f er definert i punktet x og at g er definert i punktet $f(x)$).

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner definere vi den *sammensatte funksjonen* $g \circ f$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (forutsatt at f er definert i punktet x og at g er definert i punktet $f(x)$).

Eksempel: Hvis $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \sqrt{x-2}$ så er $(g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2-1)-2} = \sqrt{x^2-3}$ definert for $x \geq \sqrt{3}$ og $x \leq -\sqrt{3}$.

Sammensatte kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige

Sammensatte kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige

Teorem 7

Anta at $f(g(x))$ er definert på et intervall som inneholder punktet c, at $\lim_{x\to c} g(x) = L$ og at f er kontinuerlig i punktet L. Da er

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right).$$

Sammensatte kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige

Teorem 7

Anta at $f(g(x))$ er definert på et intervall som inneholder punktet c, at $\lim_{x\to c} g(x) = L$ og at f er kontinuerlig i punktet L. Da er

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right).$$

Anta i tillegg at g er kontinuerlig i punktet c (dvs. $g(c) = L$). Da er

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

Dvs. at den sammensatte funksjonen $f \circ g$ kontinuerlig i punktet c.

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$
4. $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$
4. $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$
5. $|x^2 - 1| = ((x^2 - 1)^2)^{1/2}$

Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er alle kontinuerlige:

1. $3x^2 - 2x$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$
4. $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$
5. $|x^2 - 1| = ((x^2-1)^2)^{1/2}$
6. $\dfrac{|x|}{\sqrt{|x+2|}} = \dfrac{(x^2)^{1/2}}{((x+2)^2)^{1/4}}$

Kontinuerlige utvidelser

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$.

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$. For $x \neq 1$ har vi at

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{(x(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$. For $x \neq 1$ har vi at

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{(x(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Funksjonen $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$ er lik $f(x)$ for $x \neq 1$, men er også kontinuerlig i punktet $x = 1$.

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$. For $x \neq 1$ har vi at

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{(x(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Funksjonen $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$ er lik $f(x)$ for $x \neq 1$, men er også kontinuerlig i punktet $x = 1$.

Vi sier at funksjonen F er en *kontinuerlig utvitelse* av f og at $x = 1$ er en *removable* diskontinuitet for f.

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$. For $x \neq 1$ har vi at

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{(x(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Funksjonen $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$ er lik $f(x)$ for $x \neq 1$, men er også kontinuerlig i punktet $x = 1$.

Vi sier at funksjonen F er en *kontinuerlig utvitelse* av f og at $x = 1$ er en *removable* diskontinuitet for f.

Da $\lim_{x \to -1^-} F(x) = \infty$ og $\lim_{x \to -1^+} F(x) = \infty$ er det ikke mulig å utvide F til en funksjon som er kontinuerlig i $x = -1$.

Kontinuerlige utvidelser

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ er kontinuerlig men ikke definert i punktene $x = \pm 1$. For $x \neq 1$ har vi at

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{(x(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Funksjonen $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$ er lik $f(x)$ for $x \neq 1$, men er også kontinuerlig i punktet $x = 1$.

Vi sier at funksjonen F er en *kontinuerlig utvitelse* av f og at $x = 1$ er en *removable* diskontinuitet for f.

Da $\lim_{x \to -1^-} F(x) = \infty$ og $\lim_{x \to -1^+} F(x) = \infty$ er det ikke mulig å utvide F til en funksjon som er kontinuerlig i $x = -1$. Punktet $x = -1$ er derfor en *nonremovable* diskontinuitet for F (og f).

Maksimums- og minimumspunkter

Maksimums- og minimumspunkter

Anta at en funksjon f er definert for alle x i et intervall $[a, b]$. Et punkt $p \in [a, b]$ sies å være et *maksimumspunkt* for f og $f(p)$ sies å være *maksimumsverdien* til f hvis $f(p) \geq f(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Maksimums- og minimumspunkter

Anta at en funksjon f er definert for alle x i et intervall $[a, b]$. Et punkt $p \in [a, b]$ sies å være et *maksimumspunkt* for f og $f(p)$ sies å være *maksimumsverdien* til f hvis $f(p) \geq f(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Tilsvarende sies et punkt $q \in [a, b]$ å være et *minimumspunkt* for f og $f(p)$ sies å være *minimumsverdien* til f hvis $f(q) \leq f(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Maksimums- og minimumspunkter

Anta at en funksjon f er definert for alle x i et intervall $[a, b]$. Et punkt $p \in [a, b]$ sies å være et *maksimumspunkt* for f og $f(p)$ sies å være *maksimumsverdien* til f hvis $f(p) \geq f(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

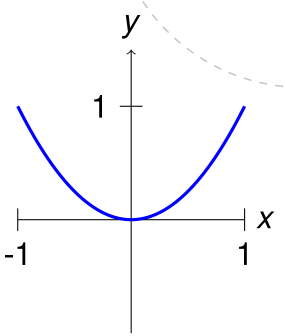
Tilsvarende sies et punkt $q \in [a, b]$ å være et *minimumspunkt* for f og $f(p)$ sies å være *minimumsverdien* til f hvis $f(q) \leq f(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Merk at en funksjon kan ha flere maksimums- og minimumspunket, men ikke mer enn en maksimumsverdi og en minimumsverdi.

Eksempel 5

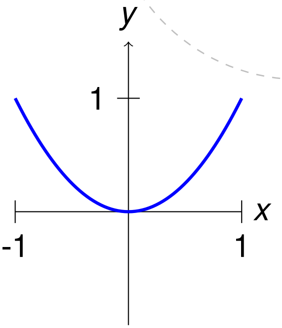
Eksempel 5

Punktet $x = 0$ er et minimumspunkt for funksjonen $f(x) = x^2$ på intervallet $[-1, 1]$ og punktene $x = \pm 1$ er maksimumspunkter for f på intervallet $[-1, 1]$.



Eksempel 5

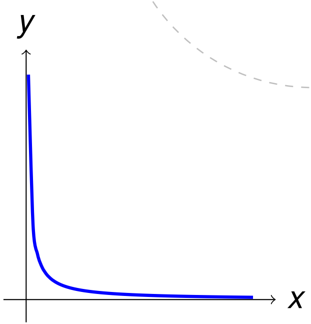
Punktet $x = 0$ er et minimumspunkt for funksjonen $f(x) = x^2$ på intervallet $[-1, 1]$ og punktene $x = \pm 1$ er maksimumspunkter for f på intervallet $[-1, 1]$. Minimumsverdien til f på intervallet $[-1, 1]$ er $f(0) = 0$ og maksimumsverdien til f på intervallet $[-1, 1]$ er $f(-1) = f(1) = 1$.



Eksempel 6

Eksempel 6

Funksjonen $g(x) = 1/x$ har intet minimumspunkt og intet maksimumspunkt på intervallet $(0, \infty)$ for hvis $a \in (0, \infty)$ så er $g(x) > g(a)$ for alle $x < a$ og $g(y) < g(a)$ for alle $y > a$.



Max-min teoremet

Max-min teoremet

Teorem 8: Max-min teoremet

Hvis en funksjon f er kontinuerlig på et lukket endelig intervall $[a, b]$ så har f et maksimumspunkt og et minimumspunkt i $[a, b]$.

Eksempel 7

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Hvis området har sidelengde x m og y m, så er omkretsen $2x + 2y$ m og arealet xy m^2.

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Hvis området har sidelengde x m og y m, så er omkretsen $2x + 2y$ m og arealet xy m^2.

Det er gitt at omkretsen er 200 m, så $y = 100 - x$.

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Hvis området har sidelengde x m og y m, så er omkretsen $2x + 2y$ m og arealet xy m^2.

Det er gitt at omkretsen er 200 m, så $y = 100 - x$. Da x og y ikke kan være negative må $x \in [0, 100]$.

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Hvis området har sidelengde x m og y m, så er omkretsen $2x + 2y$ m og arealet xy m^2.

Det er gitt at omkretsen er 200 m, så $y = 100 - x$. Da x og y ikke kan være negative må $x \in [0, 100]$.

Vi skal altså finne maksimumsverdien til funksjonen $A(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$ på intervallet $[0, 100]$.

Eksempel 7

- Hva er det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde?

Hvis området har sidelengde x m og y m, så er omkretsen $2x + 2y$ m og arealet xy m^2.

Det er gitt at omkretsen er 200 m, så $y = 100 - x$. Da x og y ikke kan være negative må $x \in [0, 100]$.

Vi skal altså finne maksimumsverdien til funksjonen $A(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$ på intervallet $[0, 100]$.

Da $A(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$ er kontinuerlig og intervallet $[0, 100]$ er lukket og endelig, vet vi at A har et maksimumspunkt, og dermed en maksimumsverdi, på $[0, 100]$.

Eksempel 7

For å finne maksimumsverdien til A omskriver vi $A(x)$ på følgende måte:

Eksempel 7

For å finne maksimumsverdien til A omskriver vi $A(x)$ på følgende måte:

$$A(x) = 100x - x^2 = 2500 - (x - 50)^2.$$

Vi ser da at $A(50) = 2500$ og at $A(x) < 2500$ når $x \neq 50$.

Eksempel 7

For å finne maksimumsverdien til A omskriver vi $A(x)$ på følgende måte:

$$A(x) = 100x - x^2 = 2500 - (x - 50)^2.$$

Vi ser da at $A(50) = 2500$ og at $A(x) < 2500$ når $x \neq 50$.

Vi har altså at 2500 er maksimumsverdien til A (og at $x = 50$ er et maksimumspunkt), så det størst mulig areal et rektangulær område kan ha hvis det skal kunnes omsluttes av et 200 m gjerde er 2500 m^2.

Skjæringssetningen (eller mellomverdisetningen)

Skjæringssetningen (eller mellomverdisetningen)

Teorem 9

Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Hvis s er en verdi i intervallet mellom $f(a)$ og $f(b)$, da finnes en c i intervallet $[a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Skjæringssetningen (eller mellomverdisetningen)

Teorem 9

Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Hvis s er en verdi i intervallet mellom $f(a)$ og $f(b)$, da finnes en c i intervallet $[a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Det følger av setningen at grafen til en kontinuerlig funksjonen ikke kan hoppe over noen verdier, og derfor er en sammenhengende kurve.

Det kontinuerlige bildet av et intervall er et intervall

Det kontinuerlige bildet av et intervall er et intervall

Det følger av max-min teoremet og skjæringssetningen at hvis f er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$ og M er maksimumsverdien til f på $[a, b]$ og m er minimumsverdien til f på $[a, b]$, så finnes det til enhver $s \in [m, M]$ en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Det kontinuerlige bildet av et intervall er et intervall

Det følger av max-min teoremet og skjæringssetningen at hvis f er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$ og M er maksimumsverdien til f på $[a, b]$ og m er minimumsverdien til f på $[a, b]$, så finnes det til enhver $s \in [m, M]$ en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$. Derfor er

$$\{y \mid y = f(x) \text{ for en } x \in [a, b]\} = [m, M].$$

Nullpunkter til kontinuerlige funksjoner

Nullpunkter til kontinuerlige funksjoner

Funksjonen $f(x) = x^3 - x - 1$ er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$.

Nullpunkter til kontinuerlige funksjoner

Funksjonen $f(x) = x^3 - x - 1$ er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$. Da $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 5 > 0$ følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(1, 2)$.

Nullpunkter til kontinuerlige funksjoner

Funksjonen $f(x) = x^3 - x - 1$ er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$. Da $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 5 > 0$ følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(1, 2)$.

Skjæringssetningen forteller oss ikke hvordan vi skal finne nullpunktet. Men til det kan vi bruke Maple:

Nullpunkter til kontinuerlige funksjoner

Funksjonen $f(x) = x^3 - x - 1$ er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$. Da $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 5 > 0$ følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(1, 2)$.

Skjæringssetningen forteller oss ikke hvordan vi skal finne nullpunktet. Men til det kan vi bruke Maple:

$$fsolve(x^3 - x - 1 = 0, x = 1\,..2);$$

$$1.324717957$$