NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Teknostart forelesning 5

Grenseverdier

I dagens forelesning skal vi se på grenseverdier.

1. Hvorfor grenseverdier er interessante.
2. En uformell definisjon av grenseverdier.
3. Regneregler for grenseverdier.
4. Ensidige grenser.
5. Uendelige grenser og grenseverdier når x går mot $\pm\infty$.

Eksempel 1

Hvis en stein slippes fra hvile nær overflaten av jorden, vil den i de første t sekunder falle $y = 4{,}9t^2$ meter.

- Hva er steinens gjennomsnittlige hastighet fra $t = 1$ til $t = 2$?

Steinens gjennomsnittlige hastighet er endringen i distansen steinen har fallt dividert med endringen i tid. Så steinens gjennomsnittligs hastighet fra t_1 til t_2 er

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9t_2^2 - 4{,}9t_1^2}{t_2 - t_1}$$

og steinens gjennomsnittligs hastighet fra $t = 1$ til $t = 2$ er

$$\frac{4{,}9(2)^2 - 4{,}9(1)^2}{2 - 1} = 14{,}7 \text{ m/s}.$$

Eksempel 1

- Hva er steinens hastighet ved tiden $t = 1$?

Vi kan med formelen fra forrige slide beregne steines gjennomsnitteligw hastighet fra $t = 1$ til $t = 1 + h$ for forskjellige verdier av h.

h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{\Delta y}{\Delta t}$	14,7000	10,2900	9,8490	9,8049	9,8005

Det ser ut til at $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nærmer seg 9,8 når h går mot 0.

Det kan vi faktisk vise er tilfellet:

Eksempel 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(t+h)^2 - 4{,}9t^2}{(t+h)-t} = \frac{4{,}9(t^2+2th+h^2-t^2)}{h}$$
$$= \frac{4{,}9(2th+h^2)}{h} = 9{,}8t + 4{,}9h.$$

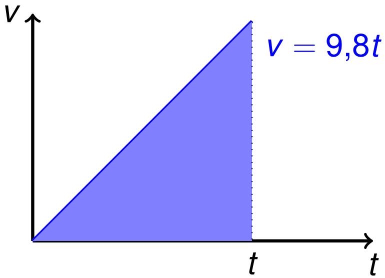
Så når h går mot 0, vil $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nærmer seg $9{,}8t$.

Vi sier at *grenseverdien for* $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ *når h går mot 0* er $9{,}8t$ og skriver

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = 9{,}8t.$$

Eksempel 1

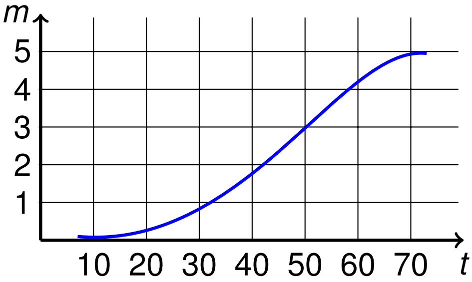
La oss tegne grafen til steinens hastighet som funksjon av t.



Arealet under grafen er lik $\frac{1}{2}t(9{,}8t) = 4{,}9t^2$ som nettopp er distansen steinen har fallt.

Eksempel 2

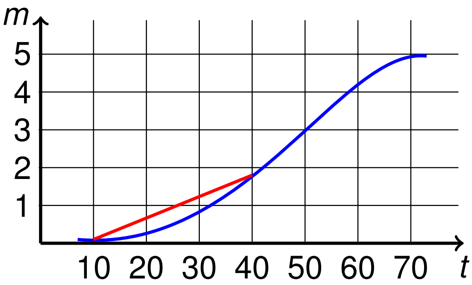
I et laboratorie-eksperiment ble biomassen av en alge-kultur målt over en 74-dagers periode. Figuren viser kulturens område målt i kvadratmillimeter plottet mot tiden t målt i dager.



Hva er den gjennomsnittlige veksten til kulturen fra dag 10 til dag 40?

Eksempel 2

Den gjennomsnittlige veksten er stigningstallet for linjen mellom punktene på grafen til m svarende til $t = 10$ og $t = 40$.

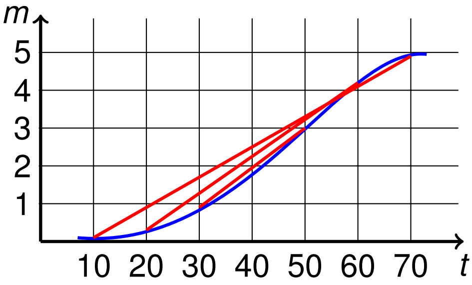


Så den gjennomsnittlige veksten til kulturen fra dag 10 til dag 40 er $\frac{1{,}7-0{,}1}{40-30} = \frac{1{,}6}{30} \approx 0,0053\ \text{mm}^2/\text{d}$.

Eksempel 2

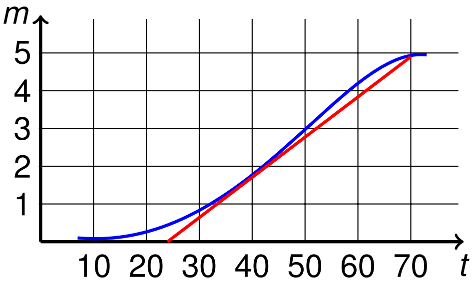
Hvor raskt vokser kulturen med ved tiden $t = 40$?

Hvis vi ser på linjene mellom punktene på grafen til m svarende til $t = 40 - h$ og $t = 40 + h$, så vil stigningstallene til disse linjene nærme seg vekstraten når h går mot 0.



Eksempel 2

I grensen vil linjene mellom punktene på grafen til m svarende til $t = 40 - h$ og $t = 40 + h$ nærme seg tangenten til grafen til m i punktet svarende til $t = 40$.



Stigningstallet til tangenten er derfor lik vekstraten.

Grenseverdier til funksjoner

Vi ønsker å presisere hva en grenseverdi er. Nærmere bestemt ønsker vi å definere hva grenseverdien til en funksjon $f(x)$ er når x går mot a.

La oss først se på noen eksempler.

Eksempel 4

La oss se på hva funksjonen $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ nærmer seg når x går mot 1.

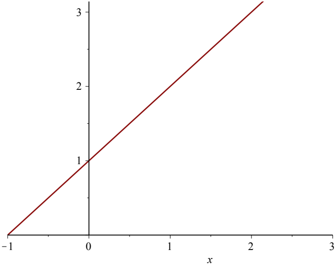
Eksempel 4

Vi kan bruke Maple til å tegne grafen til f:

$$f := x \rightarrow \frac{(x^2 - 1)}{x - 1};$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$plot(f(x), x = -1..3);$



På grafen ser vi at selv om $f(x)$ ikke er definert for $x = 1$, så nærmer $f(x)$ seg 2 når x går mot 1.

Eksempel 4

La oss vise at det er tilfellet:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

når $x \neq 1$.

Det følger at når x er nær, men ikke lik, 1, så er $f(x)$ nær 2.

Eksempel 5

La oss se på hva funksjonen $g(x) = (1 + x^2)^{1/x^2}$ nærmer seg når x går mot 0.

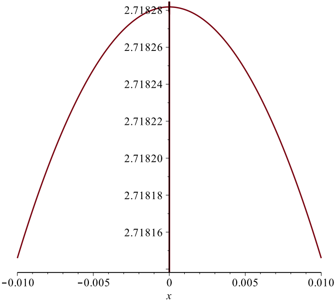
Eksempel 5

Vi kan bruke Maple til å tegne grafen til g:

$$g := x \to \left(1 + x^2\right)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)};$$

$$x \to \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$plot(g(x), x = -0.01\,..0.01);$$



Eksempel 5

På grafen ser det ut til at selv om $g(x)$ ikke er definert for $x = 0$, så nærmer $g(x)$ seg 2,71828 når x går mot 0.

Vi vil senere vise at

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{1/x^2} = e = 2,718281828459045\ldots$$

Eksempel 5

La oss prøve å få Maple til å regne ut hva funksjonen $g(x)$ nærmer seg når x går mot 0 ved å regne ut verdien av $g(x)$ for $x = 0,1$, $x = 0,01$, $x = 0,001$, $x = 0,0001$ og $x = 0,00001$.

for n **from** 1 **to** 5 **do** $print(evalf(g((0.1)^n)))$ **end do**;

$$2.704813829$$
$$2.718145927$$
$$2.718280469$$
$$2.718281815$$
$$1.$$

At Maple returnere verdien 1 når x er 0,00001 skyldes avrundingsfeil. Dette viser at man ikke alltid kan bruke numeriske tilnærmelser til å beregne grenseverdier (vi skal se senere at Maple kan godt regne ut hva grenseverdien av $g(x)$ er x går mot 0).

En uformell definisjon av grenseverdier

Det er nå tid til å gi en uformell definisjon av grenseverdier.

Definisjon 1

Anta at $f(x)$ er definert i nærheten av a. Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot* a dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

- At $f(x)$ *er definert i nærheten av* a betyr at det finnes $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert på $(a - c, a)$ og på $(a, a + c)$.
- Vi skriver $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dersom L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a.

En uformell definisjon av grenseverdier

Definisjon 1

Anta at $f(x)$ er definert i nærheten av a. Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot* a dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

- Eksistensen av $\lim_{x\to a} f(x)$ krever ikke at $f(a)$ eksisterer og avhenger ikke av $f(a)$.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ er entydig bestemt (hvis den eksisterer), dvs. at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} f(x) = M$, så er $L = M$ (det er kanskje ikke helt tydelig når vi bruker den uformelle definisjonen, men vi kan bevise det etter vi introdusert en formelle definisjon av grenseverdier).

Eksempel 6

- Hva er $\lim_{x \to a} x$?

Det er klart at vi kan sikre oss at x er så nær a som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær a, så $\lim_{x \to a} x = a$.

Eksempel 7

- La c være en konstant. Hva er $\lim_{x\to a} c$?

Det er klart at vi kan sikre oss at c er så nær c som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær a, så $\lim_{x\to a} c = c$.

Regneregler for grenseverdier

Følgende regneregler er ofte nyttig ved beregning av grenseverdier:

Teorem 2

Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ og k er en konstant, da gjelder:

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L - M$.
3. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM$.
4. $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$.
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L/M$ forutsatt at $M \neq 0$.

Regneregler for grenseverdier

Følgende regneregler er ofte nyttig ved beregning av grenseverdier:

Teorem 2

Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ og k er en konstant, da gjelder:

6. $\lim_{x\to a}(f(x))^{m/n} = L^{m/n}$ forutsatt at m og n er heltall, $n > 0$, og at $L > 0$ hvis n er et partall, og $L \neq 0$ hvis $m < 0$.
7. $L \leq M$ hvis det er et $c > 0$ slik at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in (a-c, a) \cup (a, a+c)$.

Eksempel 8

La oss bestemme $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$.

For $x \neq -2$ har vi at

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}.$$

Det følger derfor av regneregler for grenseverdier at

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-2-1}{-2+3} = -3.$$

Grenser av polynomier og rasjonalle funksjoner

Det forrige eksempel kan generaliseres til følgende setning:

Teorem 3

1. Hvis $P(x)$ er et polynom så er $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ for enhver a.
2. Hvis $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer så er $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ forutsatt at $Q(a) \neq 0$.

Skvisesetningen

Et annet resultat som er nyttig ved utregning av grenseverdier er skvisesetningen:

Teorem 4

Hvis $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ for alle x i nærheten av a (men ikke nødvendigvis for $x = a$) og $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, så er $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Eksempel 9

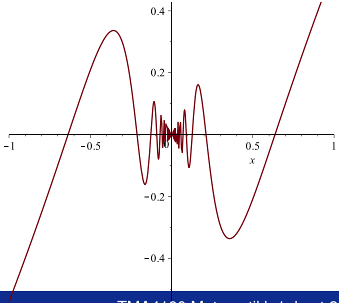
- La oss bestemme grenseverdien $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x)$.

La oss bruke Maple til å tegne grafen til $g(x) = x\cos(1/x)$.

$$g := x \to x\cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$x \to x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$plot(g(x), x = -1..1);$$



Eksempel 9

Det synes at $\lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0$. La oss bruke Skvisesetningen til å vise det:

- Da $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ for alle θ, følger det at $-|x| \leq x \cos(1/x) \leq |x|$ for alle x forskjellig fra 0.
- Da $\lim_{x \to 0} -|x| = \lim_{x \to 0} |x| = 0$ følger det derfor av Skvisesetningen at $\lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0$.

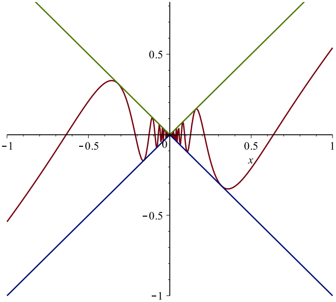
Eksempel 9

La oss illustrere det vha. Maple:

$f := x \to -|x|;$

$$x \to -|x|$$

$h := x \to |x|;$



Ensidige grenser

Noen ganger er vi interessert i oppførselen til en funksjon bare på den ene siden av et punkt. Vi vil derfor innføre *ensidige grenser*.

Definisjon 2

Anta at $f(x)$ er definert på et intervall (b, a). Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot* a *fra venstre* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x mindre enn a og tilstrekkelig nær a.

- Vi skriver $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dersom L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a fra venstre.

Ensidige grenser

Grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a fra høyre er definert på tilsvarende vis:

Definisjon 2

Anta at $f(x)$ er definert på et intervall (a, b). Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot* a *fra høyre* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x større enn a og tilstrekkelig nær a.

- Vi skriver $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dersom L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot a fra høyre.

Forholdet mellom ensidige grenser og tosidige grenser

Det er klart at følgende relasjon mellom ensidige grenser og tosidige grenser gjelder:

Teorem 1

En funksjon $f(x)$ har en grenseverdi L for x gående mot a hvis og bare hvis L er grenseverdien av $f(x)$ både når x går mot a fra venstre og høyre. Altså,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Eksempel 10

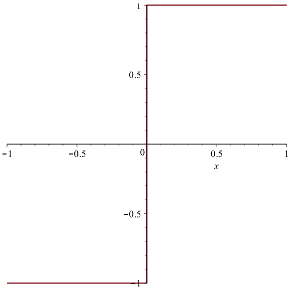
La $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Vi bruker Maple til å tegne grafen til $f(x)$:

$$f := x \to \frac{x}{|x|};$$

$$x \to \frac{x}{|x|}$$

$$plot(f(x), x = -1..1);$$



Eksempel 10

Vi ser at $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x < -1 \\ 1 & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$.

Derfor er $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Det følger at $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke eksisterer.

Regneregler for ensidige grenser

Regnereglene for tosidige grenser i Teorem 2 og Skvisesetningen gjelder også for ensidige grenser.

Eksempel 11

La oss se på grenseverdien av $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$ når x går mot 2 fra venstre og høyre.

Når $x < 2$ er $|x-2| = -(x-2)$, så

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2+x-6} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{5}.
\end{aligned}$$

Eksempel 11

Tilsvarende er $|x-2| = (x-2)$ når $x > 2$, så

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{x^2+x-6} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Det følger at $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$ ikke eksisterer.

Eksempel 12

La oss se på grenseverdien av $g(x) = |x + 3|$ når x går mot -3 fra venstre og høyre.

Når $x < -3$ er $|x + 3| = -(x + 3)$, så

$$\lim_{x \to -3^-} g(x) = \lim_{x \to -3^-} |x + 3| = \lim_{x \to -3^-} -(x + 3) = 0.$$

Tilsvarende er $|x + 3| = x + 3$ når $x > -3$, så

$$\lim_{x \to -3^+} g(x) = \lim_{x \to -3^+} |x + 3| = \lim_{x \to -3^+} x + 3 = 0.$$

Det følger at $\lim_{x \to -3} g(x) = \lim_{x \to -3} |x + 3| = 0$.

Grenseverdier når x går mot $\pm\infty$

Noen ganger er vi interessert i hva som skjer med verdien til en funksjon på lang sikt.

La oss først se på er eksempel:

Eksempel 13

Anta at biomassen av en alge-kultur målt i gram er gitt ved $m(t) = 20(1 - 1/(t+2))$ der t er målt i dage.

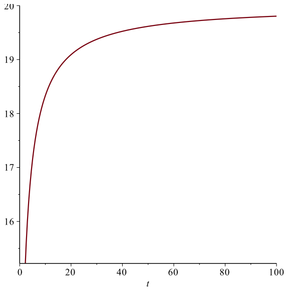
Eksempel 13

La oss se på hvordan biomassen utvekler seg på lang sikt vha. Maple:

$$m := t \rightarrow 20\left(1 - \frac{1}{t+2}\right);$$

$$t \rightarrow 20 - \frac{20}{t+2}$$

$$plot(m(t), t = 0..100);$$



Eksempel 13

Det synes at biomassen på lang sikt nærmer seg 20 gram.

La oss vise at det er tilfellet:

$|20 - m(t)| = \frac{20}{t+2}$, så hvis $t > R$ er forskjellen mellom $m(t)$ og 20 mindre enn $\frac{20}{R+2}$. Gitt en hvilken som helst $\epsilon > 0$ har vi at $\frac{20}{R+2} < \frac{20}{R} = \epsilon$ dersom $R = \frac{20}{\epsilon}$.
Det følger at vi kan gjøre forskjellen mellom $m(t)$ og 20 så liten som vi ønsker ved å velge t tilstrekkelig stor.

Vi sier derfor at 20 er grenseverdien av $m(t)$ når t går mot uendelig og skriver $\lim_{t\to\infty} m(t) = 20$.

Grenseverdier når x går mot ∞

Definisjon 1

Anta at $f(x)$ er definert i på et intervall (b, ∞). Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot uendelig* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig stor.

Vi skriver $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ dersom L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot uendelig.

Grenseverdier når x går mot $-\infty$

Definisjon 1

Anta at $f(x)$ er definert i på et intervall $(-\infty, b)$. Vi sier at L *er grenseverdien av* $f(x)$ *når* x *går mot minus uendelig* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så nær L som vi ønsker ved å velge $-x$ tilstrekkelig stor.

Vi skriver $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ dersom L er grenseverdien av $f(x)$ når x går mot minus uendelig.

Regneregler for grenseverdier når x går mot $\pm\infty$

Regnereglene for grenseverdier i Teorem 2 og Skvisesetningen gjelder også når x går mot $\pm\infty$.

Horisontale asymptoter

Hvis $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ sier vi at linjen $y = L$ er en *horisontal asymptote* for f.

Eksempel 14

La $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hvis $x > 0$ er

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}.$$

Da $\lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 0$, følger det at

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} = 1.$$

Eksempel 14

Tilsvarende har vi for $x < 0$ at

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{1/x^2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{1+1/x^2}}.$$

så

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+1/x^2}} = -1.$$

Følgelig er $y = 1$ og $y = -1$ horisontale asymptoter for $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

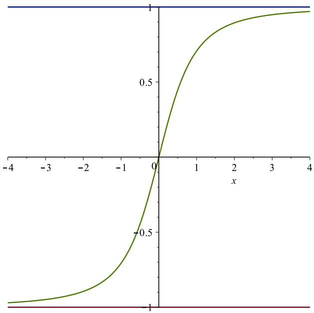
Eksempel 14

La oss illustrere det vha. Maple:

$$f := x \rightarrow \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$plot(\{f(x), 1, -1\}, x = -4..4);$



Uendelige grenseverdier

Den siste typen grenseverdier vi skal se på er når $f(x)$ (eller $-f(x)$) vokser ubegrenset.

Definisjon

Anta at $f(x)$ er definert i nærheten av a. Vi sier at $f(x)$ *går mot uendelig når x går mot a* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så stor som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

Vi skriver $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ dersom $f(x)$ går mot uendelig når x går mot a, men det er viktig å huske på at ∞ ikke er et tall, så vi kan ikke regne med uendelige grenseverdier på samme måte som med endelige grenseverdier.

Uendelige grenseverdier

At $f(x)$ går mot minus uendelig definerer vi tilsvarende:

Definisjon

Anta at $f(x)$ er definert i nærheten av a. Vi sier at $f(x)$ *går mot minus uendelig når x går mot a* dersom vi kan sikre oss at $-f(x)$ er så stor som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær, men ikke lik, a.

Vi skriver $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ dersom $f(x)$ går mot minus uendelig når x går mot a.

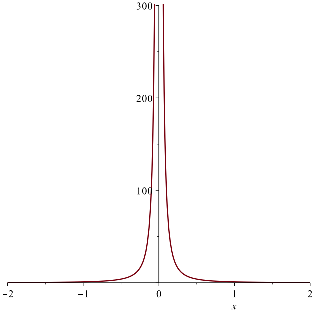
Eksempel 15

La oss se på $f(x) = 1/x^2$ når x går mot 0.

$$f := x \to \frac{1}{x^2};$$

$$x \to \frac{1}{x^2}$$

$plot(f(x), x = -2..2);$



Eksempel 15

Det synes at $f(x)$ går mot uendelig når x går mot 0. La oss vise at det er tilfellet:

Gitt en hvilken som helst $M > 0$ har vi at $f(x) = 1/x^2 > M$ dersom $|x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Vi kan altså sikre oss at $f(x)$ er så stor som vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær 0.

Så $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$.

Uendelige ensidige grenser

Vi definere uendelige ensidige grenser på tilsvarende måte som vi definere uendelige tosidige grenser:

Definisjon

Anta at $f(x)$ er definert på et intervall (b, a). Vi sier at $f(x)$ *går mot uendelig når* x *går mot* a *fra venstre* dersom vi kan sikre oss at $f(x)$ er så stor som vi ønsker ved å velge x mindre enn a og tilstrekkelig nær a.

Vi skriver $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ dersom $f(x)$ går mot minus uendelig når x går mot a fra venstre.

Uendelige ensidige greser og uendelige grenser når x går mot $\pm\infty$

På tilsvarende måte definere vi $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Vertikale asymptoter

Hvis $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ sier vi at linjen $x = a$ er en *vertikal asymptote* for f.

Eksempel 16

La $f(x) = 1/x$.

Gitt en hvilken som helst $M > 0$ har vi at $f(x) = 1/x > M$ dersom $0 < x < 1/M$.

Vi kan altså sikre oss at $f(x)$ er stor som vi ønsker ved å velge x større enn og tilstrekkelig nær 0.

Så $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

Tilsvarende har vi at hvis $M > 0$ så er $-f(x) = -1/x > M$ dersom $0 > x > -1/M$.

Vi kan altså sikre oss at $-f(x)$ er stor som vi ønsker ved å velge x mindre enn og tilstrekkelig nær 0.

Så $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$.

Eksempel 16

Vi har altså at linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote for $f(x) = 1/x$. La oss illustrere det vha. Maple:

$$f := x \to \frac{1}{x};$$

$$x \to \frac{1}{x}$$

$$plot(f(x), x = -1..1);$$