NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Teknostart Forelesning 3

Tema

- Logikk
- Definisjoner og Teoremer
- Mengder og Egenskaper ved de Reelle Tall
- Bevisføring i Teori og Praksis

Logikk

Logikk er læren om lovene som gjør tenkningen, resoneringen og argumentasjonen **gyldig**.

Definisjon

*En **påstand** er et utsagn som enten er sant eller usant (men ikke begge deler).*

Eksempel:

Gitt en person 'Ole' og gitt fire tall $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, så er følgende utsagn påstander.

- *'Ole er Trønder'*
- $a \geq 5$
- $ax^2 + bx + c = 0.$

Følgende utsagn er **ikke** påstander

- 'Hva er det til middag?'
- $ax^2 + bx + c.$

Implikasjon

Hvis sannheten av en påstand, H (hypotese), medfører at en annen påstand, K (konklusjon), er sann, skriver vi

$$H \Rightarrow K.$$

- 'Ole er Trønder' $\Rightarrow$ 'Ole er Nordmann'
- $x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$

De følgende uttrykkene betyr nøyaktig det samme og er bare språklige variasjoner over det faktum at $x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$:

- **Hvis** $x \geq 5$, **så** er $x \geq 2$
- $x \geq 5$ impliserer/medfører at $x \geq 2$
- $x \geq 2$ **hvis** $x \geq 5$
- $x \geq 5$ **bare hvis** $x \geq 2$
- $x \geq 2$ er en **nødvendig** betingelse for at $x \geq 5$
- $x \geq 5$ er en **tilstrekkelig** betingelse for at $x \geq 2$.

Oppgave

1. *Uttrykk 'Ole er Trønder'* $\Rightarrow$ *'Ole er nordmann' på de seks ulike måtene som vist over.*
2. *Uttrykk* $H \Rightarrow K$ *på de seks ulike måtene som vist over.*

De følgende uttrykkene betyr nøyaktig det samme og er bare språklige variasjoner over det faktum at $x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$:

- **Hvis** Ole er Trønder, **så** er han nordmann
- Ole er Trønder impliserer/medfører at er en nordmann
- Ole er nordmann **hvis** han er Trønder
- Ole er Trønder **bare hvis** han er nordmann
- At Ole er nordmann er en **nødvendig** betingelse for at er en Trønder
- At Ole er en Trønder er en **tilstrekkelig** betingelse for at han er en nordmann

Oppgave

1. *Uttrykk 'Ole er Trønder' $\Rightarrow$ 'Ole er nordmann' på de seks ulike måtene som vist over.*
2. *Uttrykk $H \Rightarrow K$ på de seks ulike måtene som vist over.*

Bruk implikasjonspil riktig!

Implikasjonspilen '$\Rightarrow$' er et veldefinert matematisk symbol og kan bare stå mellom to påstander.

Hvis P og Q er påstander, så kan vi godt spørre om det er sant at $P \Rightarrow Q$. Altså, uttrykket $P \Rightarrow Q$ er en påstand i seg selv.

Når er $P \Rightarrow Q$ en sann påstand?

$P \Rightarrow Q$ er sant bortsett fra når P er sann uten at Q er sann.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Tabell : Sannhetstabell

Vi utvider med tre kolonner: *ikkeQ*, *ikkeP* og *ikkeQ* $\Rightarrow$ *ikkeP*.

Hvis P og Q er påstander, så kan vi godt spørre om det er sant at $P \Rightarrow Q$. Altså, uttrykket $P \Rightarrow Q$ er en påstand i seg selv.

Når er $P \Rightarrow Q$ en sann påstand?

$P \Rightarrow Q$ er sant bortsett fra når P er sann uten at Q er sann.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$ikkeQ$	$ikkeP$	$ikkeQ \Rightarrow ikkeP$
S	S	S	U	U	S
S	U	U	S	U	U
U	S	S	U	S	S
U	U	S	S	S	S

Tabell : Sannhetstabell II

Vi utvider med tre kolonner: $ikkeQ$, $ikkeP$ og $ikkeQ \Rightarrow ikkeP$.

$$(P \Rightarrow Q) \iff (ikkeQ \Rightarrow ikkeP).$$

Oppgave

La $x \in \mathbb{R}$. Hvilke av de følgende påstandene er sanne?

1. $x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$
2. $x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
3. $x = 2$ eller $x = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$
4. $x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ eller $x = -2$

Løsning:

1),3) og 4) er sann. 2) er usann.

Bevis følgende teorem:

Theorem

La $a, b, x \in \mathbb{R}$ *og* $a \neq 0$. *Da er*

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Theorem

La $a, b, x \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$. Da er

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Bevis.

$\Rightarrow$:
Anta at $ax + b = 0$. Da er

$$\begin{aligned} & ax + b = 0 \\ \Rightarrow \quad & ax + b - b = 0 - b \\ \Rightarrow \quad & ax = -b \\ \Rightarrow \quad & \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \\ \Rightarrow \quad & x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Vi har altså bevist at hvis $ax + b = 0$, så er $x = -\frac{b}{a}$.

$\Leftarrow$:
Anta at $x = -\frac{b}{a}$. Da er

$$\begin{aligned} ax + b &= a\left(-\frac{b}{a}\right) + b \\ &= \frac{-ab}{a} + b \\ &= -b + b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Så hvis $x = -\frac{b}{a}$, så er $ax + b = 0$. □

Definisjoner

- er presise formuleringer beskrevet med veldefinerte begreper
- er nødvendige for at alle har den samme forståelsen av tekniske begreper
- ,hvis de er gode, gir oss mulighet til å stille de nyttige spørsmålene

Definisjon

*La f være en funksjon $f : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$. Den **deriverte** av f er funksjonen f' gitt ved*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Før en definisjon gir mening, må begrepene som brukes være definerte.

- Hva er en funksjon?
- Hva betyr $f : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$?
- Hva er $\lim_{h \to 0}$?

Språket er endelig. Umulig å definere ethvert konsept.
All matematikk må starte fra et **valgt utgangspunkt** bestående av **udefinerte begreper** og **ubegrunnede påstander**.

Teorem og Bevis

Definisjon

*Et **teorem** er en påstand som kan bevises, og et **bevis** er en sekvens av steg som leder oss – på en logisk korrekt måte – fra hypotesen til konklusjonen i teoremet.*

Definisjon

*Et **teorem** er en påstand som kan bevises, og et **bevis** er en sekvens av steg som leder oss – på en logisk korrekt måte – fra hypotesen til konklusjonen i teoremet.*

Hvert steg skal rettferdiggjøres av en grunn, og det er seks typer grunner som kan bli gitt:

- ved hypotese
- ved en av de ubegrunnede påstandene
- ved et tidligere teorem
- ved definisjon
- ved et tidligere steg i beviset
- ved en av reglene for logikk

Mengder

En mengde kan ikke defineres ut ifra andre matematiske begreper.
Må forstå begrepet mengde ut ifra egenskapene mengder har.

- En mengde er unikt definert av hvilke **elementer** den har
- Rekkefølgen på elementene er ikke viktig
- Gjenntagende elementer telles **ikke**
- Det er ingen begrensninger på hvilke type elementer en mengde kan bestå av
- Hvis objektet a (et tall, funksjon, mengde, etc.) er et element i en mengde A, så skriver vi $a \in A$. Hvis ikke a er et element i A, så skriver vi $a \notin A$. a kan ikke både være og ikke være et element i A. Altså

$$ikke(a \in A) \iff a \notin A$$

De Naturlige Tall og Heltallene

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

er mengden av alle **naturlige tall**.
Heltallene benvnes som

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Mengdebeskrivelse vha. Betingelse

Mengder kan også beskrives vha. en påstand:

$$A = \{a \mid P(a)\}$$

'*A er mengden av alle a slik at P*(a)'

$$a \in A \iff P(a).$$

Eksempel:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

'C er mengden av alle punkter (x, y) i planet slik at $x^2 + y^2 = 1$'.

Oppgave

La mengden C være definert som over og

1. *Vis at $(-2, 1) \notin C$*
2. *Vis at $(x_0, y_0) \in C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right) \in C$*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. Vis at $(-2, 1) \notin C$
2. Vis at $(x_0, y_0) \in C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right) \in C$

Løsning 1:

Bevis.

$$(-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad (-2, 1) \notin C.$$

□

Løsning 2:

Bevis.

Anta $(x_0, y_0) \in C$, dvs. $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 + x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0^2\right) \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Dvs, $\left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right) \in C$.

□

De Rasjonale Tallene

De **rasjonale tallene** er alle tall på formen $\frac{m}{n}$ der m og n er heltall og $n \neq 0$. Mengden av de rasjonale tallene benvnes tradisjonelt med $\mathbb{Q}$.

Oppgave

Beskriv mengden av de rasjonale tallene som

$$\mathbb{Q} = \{a \mid P(a)\}.$$

Løsning:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad n \neq 0 \right\}.$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad n \neq 0 \right\}.$$

Oppgave

Er $0.123123123\cdots$ *et rasjonalt tall? Hvorfor/Hvorfor ikke? (Desimalene fortsetter i det uendelige med gjentagende siffer 1,2,3).*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad n \neq 0 \right\}.$$

Oppgave

Er $0.123123123\cdots$ *et rasjonalt tall?*

Løsning: Ja. La $x = 0.123123\cdots$. Da er

$$1000x = 123.123123\cdots,$$

så

$$\begin{aligned} 999x &= 1000x - x \\ &= 123.123123\cdots - 0.123123\cdots \\ &= 123. \end{aligned}$$

Og dermed er

$$\begin{aligned} 0.123123\cdots &= x \\ &= \frac{123}{999} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Intervaller

Definition

La $a, b \in \mathbb{R}$ der $a < b$. Vi definer da henholdsvis det **åpne intervallet fra a til b**, det **lukkede intervallet fra a til b** og de **halvåpne intervallene fra a til b** som

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

De Reelle Tall

Problem

$\mathbb{Q}$ inneholder ikke alle tallstørrelser vi intuitivt mener bør eksistere.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq ?\mathbb{R}$$

Ikke lett å beskrive $\mathbb{R}$ som en mengde.

Det er funnet nyttig at elementene i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller tre kategorier av ubegrunnede påstander.

1. Algebraiske egenskaper
2. Ordningsegenskaper
3. Kompletthetsegenskaper

De *algebraiske egenskapene* er 'regnereglene' man lærte i grunnskolen.
Kompletthetsegenskapen sikrer at $\mathbb{R}$ er uten "hull". Det som skiller de reelle tallene fra $\mathbb{Q}$
Ordingsegenskapene krever at det finnes positive og negative tall og beskriver en ordnig av tallene.

Algebraiske Egenskaper

- Alle par av reelle tall kan **adderes** og **multipliseres**
- $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$ og $ab \in \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ medfører at

1. $a + b = b + a$ og $ab = ba$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ og $(ab)c = a(bc)$
3. det finnes to unike elementer $0, 1 \in \mathbb{R}$ slik at $a + 0 = a$ og $1b = b$
4. det finnes to elementer $-a, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ slik at $a + (-a) = 0$ og $b\frac{1}{b} = 1$ forutsatt at $b \neq 0$
5. $a(b + c) = ab + ac$

Ordningsegenskapene

Hvis $a, b \in \mathbb{R}$, så er nøyaktig en av de følgende påstandene sann.

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$

$$a < b \quad \text{og} \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

Ordningsegenskapene

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$, så vil

1. $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$
2. $a < b \quad \Rightarrow \quad a - c < b - c$
3. $a < b$ og $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$
4. $a < b$ og $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$
5. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 0$
6. $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Reglene 1-4 og 6 (for $a > 0$) holder også hvis < og > erstattes henholdsvis med $\leq$ og $\geq$. Påstanden $a \leq b$ er en raskere notasjon for påstanden ($a < b$ *eller* $a = b$.)

Føring og Oppgaveløsning i Praksis

Matematikk er kanskje en **eksakt** vitenskap, men oppgaveløsning er en **kreativ** prosess.

- Å **løse** en oppgave vil si å gjøre det oppgaven ber deg om å gjøre
- Med **føring** menes hva som konkret skrives på papiret

Å løse et problem

- Forså problemet. Hva vet vi?. Hva ønsker vi å finne?
- Omformulér oppgaven: Hvis...,så...
- Finnes et delproblem som vil føre deg nærmere løsningen?
- Begynn å skriv! Det trigger hukommelsen
- Finn en vei som vil føre frem til løsningen
- Gjennomfør planen. Sammenfatt delresutatene slik at de på en **logisk korrekt** måte viser at du har løst oppgaven

Hvorfor er det viktig med en god føring?

- Bedre oversikt
- Løse oppgaven som en kjede av delproblemer
- Vil gjøre deg istand til å løse vanskeligere oppgaver

Føring

- Legg prestisje i å bruke likhetstegnet riktig!
- Legg prestisje i å bruke implikasjonspiler riktig!
- Bruk tekst
- Skriv matematikk med penn på ulinjerte ark
- Operér med to venstremarger
- La likhets- eller ulikhetstegnene stå under hverandre
- Inkludér akkurat så mange detaljer at du selv ville ha forstått hvert steg
- ’bevis:’ ... $\square$
- Markér viktige delresultater og hva som er løsningen av oppgaven

Husk at **dersom oppgaven er å bevise en påstand, så er selve beviset av påstanden løsningen av oppgaven.**

Oppgave

La a og b være to positive tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2.$$

Bevis.

$\underline{\Rightarrow}$:
Anta $a < b$. Ettersom $a > 0$, så følger det fra 3) at $a^2 < ab$. På samme måte, ettersom $b > 0$, så følger det fra 3) at $ab < b^2$. Altså er $a^2 < ab < b^2$. Dvs. $a^2 < b^2$.

$\underline{\Leftarrow}$:
Anta ikke $a < b$. Dvs. $b \leq a$. Ettersom $a > 0$, så følger det fra 3) at $ab \leq a^2$. På samme måte, ettersom $b > 0$, så følger det fra 3) at $b^2 \leq ab$. Altså er $b^2 \leq ab \leq a^2$. Dvs. $b^2 \leq a^2$. Altså ikke $a^2 < b^2$. $\square$

Oppgave

La a og b være to negative tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at

$$a < b \iff a^2 > b^2.$$

Bevis.

$\Rightarrow$:
Anta $a < b$. Ettersom $a < 0$, så følger det fra 4) at $a^2 > ab$. På samme måte, ettersom $b < 0$, så følger det fra 4) at $ab > b^2$. Altså er $a^2 > ab > b^2$. Dvs. $a^2 > b^2$.

$\Leftarrow$:
Anta ikke $a < b$. Dvs. $b \leq a$. Ettersom $a < 0$, så følger det fra 4) at $ab \geq a^2$. På samme måte, ettersom $b < 0$, så følger det fra 4) at $b^2 \geq ab$. Altså er $b^2 \geq ab \geq a^2$. Dvs. $b^2 \geq a^2$. Altså ikke $a^2 < b^2$. $\square$

Oppgave

Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at

$$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}.$$

Bevis.

Anta $0 < a < b$. Det følger fra 6) at $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ og det følger da fra 3) at

$$b\frac{1}{b} < b\frac{1}{a} \quad \text{og} \quad a\frac{1}{b} < a\frac{1}{a}.$$

Dvs.

$$1 < \frac{b}{a} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} < 1.$$

□

Oppgave

La x og c være to positive tall. Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at

$$x < cx \iff c > 1.$$

Bevis.

$\Rightarrow$:
Anta $x < cx$. Ettersom $x \neq 0$ finnes et tall $\frac{1}{x}$ slik at $x\frac{1}{x} = 1$.
Ved 5) er $\frac{1}{x} > 0$ så ved 3) er

$$x\frac{1}{x} < cx\frac{1}{x}.$$

Dvs. $1 < c$.
$\Leftarrow$:
Anta $1 < c$. Ettersom $x > 0$, så er $x < cx$ ved 3). $\square$

Oppgave

Bruk ordningsegenskapene for reelle tall til å bevise at

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bevis.

Vi skal bevise at **hvis** $x \in \mathbb{R}$, **så** er $x^2 \geq 0$.
Anta $x \in \mathbb{R}$. Da er enten $x = 0$, $x > 0$ eller $x < 0$. Hvis $x = 0$, så er

$$x^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Hvis $0 < x$, så er ved 3) $0x < x^2$. Dvs

$$x^2 > 0.$$

Hvis $x < 0$, så er ved 4)

$$x^2 > 0x = 0.$$

Altså, i alle tilfeller er $x^2 \geq 0$. $\square$

Oppgave

Bruk de algebraiske egenskapene til å bevise at produktet av to reelle tall er 0 hvis og bare hvis minst en av faktorene er 0.

Bevis.

La $x, y \in \mathbb{R}$. Vi skal bevise

$$xy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0.$$

$\Leftarrow$: Anta $y = 0$. Da er

$$\begin{aligned} xy &= x0 && \text{ved hypotese} \\ &= x(0+0) && \text{ved 3)} \\ &= x0 + x0 && \text{ved 5)} \\ &= xy + xy && \text{ved hypotese.} \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= xy - xy && \text{ved 4)} \\ &= (xy + xy) - xy && \text{ved beregningen over} \\ &= xy + (xy - xy) && \text{ved 2)} \\ &= xy + 0 && \text{ved 4)} \\ &= xy && \text{ved 3)} \end{aligned}$$

Hvis $x = 0$, er beviset helt tilsvarende.
$\Rightarrow$: Anta $xy = 0$.
Hvis $x = 0$, så er konklusjonen sann. Hvis $x \neq 0$ så finnes ved 4) et tall $\frac{1}{x}$ slik at $\frac{1}{x}x = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{x}0 && \text{ved beviset for } \Leftarrow \text{ over} \\ &= \frac{1}{x}(xy) && \text{ved hypotese} \\ &= \left(\frac{1}{x}x\right)y && \text{ved 2)} \\ &= 1y && \text{ved 4)} \\ &= y && \text{ved 3).} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0.$$

$\square$

Definition

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon

- f er **odde** dersom $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- f er **jevn** dersom $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Oppgave

Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x$ er odde.

Oppgave

Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x^2$ er jevn.

Oppgave

Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x^2$ er jevn.

Bevis.

La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-1x)^2 \\ &= (-1)^2 x^2 \\ &= x^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Altså, $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dvs. f er jevn. $\square$

Oppgave

La $m \in \mathbb{N}$ og la funksjonen f være gitt ved $f(x) = x^m$. Vis at f er odde hvis m er et oddetall og at f er jevn hvis m er et partall.

Bevis.

Anta m er et oddetall. Da finnes et ikke-negativt heltall k slik at $m = 2k + 1$. La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^m \\ &= (-x)^{2k+1} \\ &= -x(-x)^{2k} \\ &= -x\left((-x)^2\right)^k \\ &= -x\left(x^2\right)^k \\ &= -xx^{2k} \\ &= -x^{2k+1} \\ &= -x^m \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Dvs. f er odde.
Anta m er et partall.... $\square$

Oppgave

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Vis at f er nullfunksjonen hvis og bare hvis f er odde og jevn.

Vi skal bevise

$$f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ er odde og jevn.}$$

Bevis.

$\underline{\Rightarrow}$: Anta $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(-x) = 0 = -0 = -f(x) \quad \text{og} \quad f(-x) = 0 = f(x)$$

så f er odde og jevn.
$\underline{\Leftarrow}$: Anta at f er odde og jevn og la $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{og} \quad f(-x) = f(x),$$

så $-f(x) = f(x)$. Dvs $2f(x) = 0$. Altså $f(x) = 0$. $\square$

Oppgave

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = 3x + 2$. La $x_0 \in \mathbb{R}$ og la ϵ være et positivt tall.
La deretter $\delta = \epsilon/3$. Vis at hvis $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller

$$-\delta < x - x_0 < \delta,$$

(avstanden mellom x og x_0 er mindre enn δ)
så er

$$-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

(avstanden mellom $f(x)$ og $f(x_0)$ er mindre enn ϵ)

Bevis.

Anta at $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller $-\delta < x - x_0 < \delta$. Da er

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= 3x + 2 - (3x_0 + 2) \\ &= 3(x - x_0) \\ &< 3\delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= 3(x - x_0) \\ &> 3(-\delta) \\ &= -\epsilon. \end{aligned}$$

Altså er

$$-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

□

Oppgave

Vi vet at summen og produktet av to heltal igjen er et heltal. Vis at det samme også gjelder for de rasjonale tallene. Altså, bevis at

$$p, q \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad p+q, pq \in \mathbb{Q}.$$

Bevis.

Anta at p og q er rasjonale tall. Da finnes fire heltall a, b, c, d der $b \neq 0 \neq d$ slik at

$$p = \frac{a}{b}, \quad q = \frac{c}{d}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} p+q &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad+cb}{bd} \in \mathbb{Q}. \\ pq &= \frac{a}{b}\frac{c}{d} \\ &= \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

fordi $ad + cb, bd, ac \in \mathbb{Z}$ og $bd \neq 0$. □

Oppgave

La $n \in \mathbb{N}$ og la $p_1, p_2, \ldots, p_n$ være n rasjonale tall. Vis at

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \in \mathbb{Q}.$$

Bevis.

Fra foregående oppgave vet vi at $p_1 + p_2 \in \mathbb{Q}$, så dermed er også

$$p_1 + p_2 + p_3 = (p_1 + p_2) + p_3 \in \mathbb{Q},$$

som igjen viser at

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = (p_1 + p_2 + p_3) + p_4 \in \mathbb{Q}.$$

Ved å fortsette på denne måten, vil vi tilslutt ha vist at

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Oppgave

Vis at alle desimaltall med endelig mange siffer, er et rasjonalt tall.

Bevis.

La x være et desimaltall med endelig mange siffer. Det finnes da to naturlige tall m, n slik at x kan skrives som

$$x = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n-1} a_{-n}$$

der a_i for $i = -n, \dots m$ er et heltall mellom 0 og 9.
Med denne notasjonen mener vi ikke multiplikasjon, men at

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1}\frac{1}{10} + \cdots + a_{-n}\frac{1}{10^n}$$
$$= \sum_{i=-n}^{m} a_i 10^i.$$

som er en endelig sum av rasjonale tall og dermed er $x \in \mathbb{Q}$ ved oppgaven over. $\square$

Oppgave

Er tallet $1 - 0.9999\cdots$ *større, mindre eller lik 0?*

Løsning: La $x = 0.999\cdots$. Da er

$$\begin{aligned} 9x &= 10x - x \\ &= 9.999\cdots - 0.999\cdots \\ &= 9. \end{aligned}$$

Dvs.

$$0.9999\cdots = x = \frac{9}{9} = 1$$

og $1 - 0.9999\cdots = 0$.