NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 12

Transcendentale funksjoner

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Den naturlige logaritmen.
2. Eksponensialfunksjoner.
3. Eksponentiell og logistisk vekst.

Den naturlige logaritmen

Vi har at $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$ for $n \neq -1$.

Vi ønsker å konstruere en funksjon f slik at $\frac{d}{dx}f(x) = x^{-1}$.

Definisjon 6: Den naturlige logaritmen

For $x > 0$ la A_x være arealet til området begrenset av kurven $y = 1/t$, linjen $y = 0$ og de vertikale linjene $t = 1$ og $t = x$. Den *naturlige logaritmen* er funksjonen $\ln x$ definert ved at

$$\ln x = \begin{cases} A_x & \text{hvis } x \geq 1, \\ -A_x & \text{hvis } 0 < x < 1. \end{cases}$$

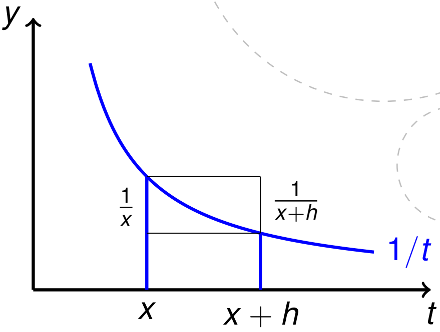
Den deriverte til $\ln x$

Teorem 1

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \text{ for } x > 0.$$

Bevis for teorem 1

Anta $x > 0$ og $h > 0$. Da er $\ln(x+h) - \ln x$ arealet til området begrenset av kurven $y = 1/t$, linjen $y = 0$ og de vertikale linjene $t = x$ og $t = x + h$.
Det følger at
$\frac{h}{x+h} < \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x}$

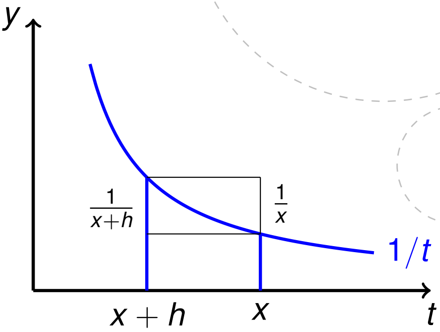


Så $\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} < \frac{1}{x}$, hvorav det følger at

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

Bevis for teorem 1

Tilsvarende har vi at hvis $x > 0$ og $h < 0$, så er $\ln(x+h) - \ln x$ arealet til området begrenset av kurven $y = 1/t$, linjen $y = 0$ og de vertikale linjene $t = x$ og $t = x + h$.



Det følger at
$\frac{h}{x} < \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x+h}$

Så $\frac{1}{x} < \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} < \frac{1}{x+h}$, hvorav det følger at

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

Bevis for teorem 1

Følgelig er

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Eksempel 1

For hvilke x er funksjonen $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ definert og hva er $f'(x)$?

$f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ er definert når $x^2 - x - 2 > 0$.

Nullpunktene til $x^2 - x - 2$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

så $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) > 0$ når $x < -1$ eller $x > 2$.

Dvs. $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ definert for $x < -1$ og $x > 2$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}.$$

Egenskaper ved $\ln x$

Teorem 2

Anta $x > 0$, $y > 0$ og r er et rasjonalt tall. Da er

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln(1/x) = -\ln x$
3. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
4. $\ln(x^r) = r \ln x$

Bevis for teorem 2

1. $\frac{d}{dx}(\ln(xy) - \ln x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Det følger at $\ln(xy) - \ln x$ er en konstant C. Hvis vi lar $x = 1$, ser vi at $C = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$. Så $\ln(xy) - \ln x = \ln y$.
2. $\frac{d}{dx}(\ln(1/x) + \ln x) = \frac{-1/x^2}{1/x} + \frac{1}{x} = 0$. Det følger at $\ln(1/x) + \ln x$ er en konstant C. Hvis vi lar $x = 1$, ser vi at $C = \ln(1) + \ln(1) = 0$. Så $\ln(1/x) + \ln x = 0$.
3. $\ln(x/y) = \ln x + \ln(1/y) = \ln x - \ln y$.
4. $\frac{d}{dx}(\ln(x^r) - r\ln x) = \frac{rx^{r-1}}{x^r} - r\frac{1}{x} = 0$. Det følger at $\ln(x^r) - r\ln x$ er en konstant C. Hvis vi lar $x = 1$, ser vi at $C = \ln(1^r) - r\ln(1) = 0$. Så $\ln(x^r) - r\ln x = 0$.

Eksempel 2

La oss forenkle uttrykket $4\ln\sqrt{x} + 6\ln(x^{1/3})$.

$$\begin{aligned}4\ln\sqrt{x} + 6\ln(x^{1/3}) &= \ln(x^{1/2})^4 + \ln(x^{1/3})^6 = \ln x^2 + \ln x^2\\ &= 2\ln x^2 = \ln(x^2)^2 = \ln x^4.\end{aligned}$$

Egenskaper ved $\ln x$

1. $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ og $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Bevis

1. Da $\ln 2 > 0$ vil $\ln(2^n) = n \ln 2 \to \infty$ når $n \to \infty$, og $\ln(1/2)^n = -n \ln 2 \to -\infty$ når $n \to \infty$. Da $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x > 0$ for $x > 0$ følger det at $\ln x$ er en voksende funksjon, og derfor er $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ og $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
2. For $x > 0$ er $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$, så $\ln|x| = \ln x$ er en antiderivert til $1/x$ på intervallet $(0, \infty)$.
   For $x < 0$ er $\frac{d}{dx} \ln(-x) = -1/(-x) = 1/x$, så $\ln|x| = \ln(-x)$ er en antiderivert til $1/x$ på intervallet $(-\infty, 0)$.
   Altså er $\ln|x|$ en antiderivert til $1/x$ på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
   Dvs. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Eksponentialfunksjonen

Funksjonen $\ln x$ er strengt voksende (da $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x > 0$ for $x > 0$), og den er dermed injektiv.

Vi la $\exp x$ være den inverse funksjonen til $\ln x$.

Vi har da at

- $y = \exp x \iff x = \ln y$ for $y > 0$,
- $\ln(\exp x) = x$ for alle x,
- $\exp(\ln x) = x$ for $x > 0$.

Egenskaber ved eksponentialfunksjonen

Det følger av egenskabpene til $\ln x$ at $\exp x$ har følgende egenskaper: For alle x og y og alle rasjonale tall r gjelder

1. $(\exp x)^r = \exp(rx)$
2. $\exp(x + y) \exp(x) \exp(y)$
3. $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
4. $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$.

Eksponentialfunksjonen

La $e = \exp(1)$.

Da er $e \approx 2,718281828459045\ldots$

For alle rasjonale tall r har vi at $e^r = (\exp(1))^r = \exp(r)$.

For en vilkårlig x *definerer* vi e^x til å være $\exp(x)$.

Egenskaber ved eksponentialfunksjonen

Da gjelder for alle x og y at

1. $(e^x)^y = e^{xy}$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{-x} = 1/e^x$
4. $e^{x-y} = e^x/e^y$.

Dessutten har vi at $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ og $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Eksempel 3

La oss forenkle uttrykket $e^{2\ln\cos x} + (\ln e^{sinx})^2$.

$$\begin{aligned} e^{2\ln\cos x} + (\ln e^{sinx})^2 &= (e^{\ln\cos x})^2 + (\sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Den naturlige logaritmen

Da $\ln x$ er den inverse funksjonen til $\exp(x)$, og $\exp(x) = e^x$ er en eksponentialfunksjon, er $\ln x$ en logaritme: $\ln x = \log_e x$.

$\ln x$ kalles den *naturlige logaritmen*.

Den deriverte og antideriverte til e^x

$\ln x$ er deriverbar og $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x > 0$ for alle $x > 0$.

Det følger at også e^x er deriverbar og at

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \ln y \big|_{y=e^x}} = \frac{1}{\frac{1}{y}\big|_{y=e^x}} = y|_{y=e^x} = e^x.$$

Følgelig er

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Generelle eksponentialfunksjoner

Hvis $a > 0$ og r er et rasjonalt tall har vi at $\ln(a^r) = r \ln a$, og dermed $a^r = e^{r \ln a}$.

Definisjon 7

For en vilkårlig x *definerer* vi a^x til å være $e^{x \ln a}$.

Da er a^x deriverbar og

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Generelle logaritmer

Hvis $a > 0$ er $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Det følger at $\log_a x$ er deriverbar og

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x\ln a}.$$

Eksempel 4

La oss derivere funksjonen $f(x) = (1/x)^{\ln x} + \log_2(3x-2)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left((1/x)^{\ln x} + \log_2(3x-2)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(1/x)\ln x} + \frac{\ln(3x-2)}{\ln 2}\right) \\
&= e^{\ln(1/x)\ln x}\frac{d}{dx}(\ln(1/x)\ln x) + \frac{1}{\ln 2}\frac{3}{3x-2} \\
&= e^{\ln(1/x)\ln x}\left(\frac{-1/x^2}{1/x}\ln x + \frac{\ln(1/x)}{x}\right) + \frac{3}{\ln 2}(3x-2) \\
&= \frac{e^{\ln(1/x)\ln x}}{x}(\ln(1/x) - \ln x) + \frac{3}{\ln 2}(3x-2) \\
&= \frac{-2\ln(x)(1/x)^{\ln x}}{x} + \frac{3}{\ln 2}(3x-2)
\end{aligned}
$$

En egenskaper ved den naturlige logaritme

Teorem 4

For $x > 0$ er $\ln x \leq x - 1$.

Bevis for teorem 4

La $g(x) = \ln x - (x-1)$. Da er $g(1) = 0$, og $g'(x) = 1/x - 1$ som er negativ for $x \in (0,1)$ og positiv for $x > 1$.

g er altså avtagende på $(0,1]$ og voksende på $[1,\infty)$, og derfor er $g(x) \geq 0$ for alle $x \in (0,\infty)$.

Det følger at $\ln x \leq x - 1$ for alle $x > 0$.

Grenseverdier til eksponentialfunksjoner og logaritmer

Teorem 5

For $a > 0$ gjelder:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$
2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$
3. $$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$$
4. $$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0.$$

Eksempel 5

La oss regne ut grenseverdien $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2(3x)}{4^{x/10}}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(3x)}{4^{x/10}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{\ln 2 e^{x \ln 4/10}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3}{\ln 4/10} x \ln 4/10\right)}{\ln 2 e^{x \ln 4/10}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3}{\ln 4/10} y\right)}{\ln 2 e^{y}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3}{\ln 4/10}\right)}{\ln 2 e^{y}} + \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(y)}{\ln 2 e^{y}} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(y)}{y} \frac{y}{e^{y}} = 0
\end{aligned}
$$

Eksponentiell vekst

Løsningen til initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} = kt, \quad y(0) = y_0$$

er $y(t) = y_0 e^k t$.

Vi sier at y vokser *eksponentielt* hvis $k > 0$ og avtager *eksponentielt* hvis $k < 0$.

Eksempel 6

En bakteriekultur inneholder 10000 bakterier. Vekstfarten målt i bakterier per time er på ethvert tidspunkt 20% av bakterietallet.

Hvis $y(t)$ er bakterietalle etter t timer er $y'(t) = \frac{20}{100}y(t)$ og $y(0) = 10000$.

Vi har derfor at $y(t) = 10000e^{t/5}$.

Logistisk vekst

Hvis

$$y(t) = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

der y_0, L og k er konstanter, sies y at ha *logistisk vekst*.