NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 11

Transcendentale funksjoner

Transcendentale funksjoner

Vi begynner nå på temaet *transcendentale funksjoner*.

Transcendentale funksjoner

Vi begynner nå på temaet *transcendentale funksjoner*.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Transcendentale funksjoner

Vi begynner nå på temaet *transcendentale funksjoner*.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Inverse funksjoner.

Transcendentale funksjoner

Vi begynner nå på temaet *transcendentale funksjoner*.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Inverse funksjoner.
2. Eksponensialfunksjoner.

Transcendentale funksjoner

Vi begynner nå på temaet *transcendentale funksjoner*.

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Inverse funksjoner.
2. Eksponensialfunksjoner.
3. Logaritmer.

Algebraiske og transcendentale funksjoner

Algebraiske og transcendentale funksjoner

- En *algebraisk* funksjon er en funksjon som består av rasjonale potenser av rasjonale funksjoner (kvotienter av polynomier).

Algebraiske og transcendentale funksjoner

- En *algebraisk* funksjon er en funksjon som består av rasjonale potenser av rasjonale funksjoner (kvotienter av polynomier).
- En *transcendental* funksjon er en funksjon som ikke er algebraisk.

Algebraiske og transcendentale funksjoner

- En *algebraisk* funksjon er en funksjon som består av rasjonale potenser av rasjonale funksjoner (kvotienter av polynomier).
- En *transcendental* funksjon er en funksjon som ikke er algebraisk.

De eneste transcendentale funksjoner vi har sett til nå er trigonometriske funksjoner ($\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ og $\csc x$).

Algebraiske og transcendentale funksjoner

- En *algebraisk* funksjon er en funksjon som består av rasjonale potenser av rasjonale funksjoner (kvotienter av polynomier).
- En *transcendental* funksjon er en funksjon som ikke er algebraisk.

De eneste transcendentale funksjoner vi har sett til nå er trigonometriske funksjoner ($\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ og $\csc x$).

Vi skal i dette temaet se på andre klasser av transcendentale funksjoner.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Definisjon 1: Injektive funksjoner

En funksjon f er *injektiv* (eller *en-til-en*) dersom $f(x_1) \neq f(x_2)$ for $x_1 \neq x_2$.

Injektive funksjoner

Definisjon 1: Injektive funksjoner

En funksjon f er *injektiv* (eller *en-til-en*) dersom $f(x_1) \neq f(x_2)$ for $x_1 \neq x_2$.

Ekvivalent, er en funksjon f injektiv hvis (og bare hvis)

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

for alle x_1, x_2 for hvilke $f(x)$ er definert.

Injektive funksjoner

Definisjon 1: Injektive funksjoner

En funksjon f er *injektiv* (eller *en-til-en*) dersom $f(x_1) \neq f(x_2)$ for $x_1 \neq x_2$.

Ekvivalent, er en funksjon f injektiv hvis (og bare hvis)

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

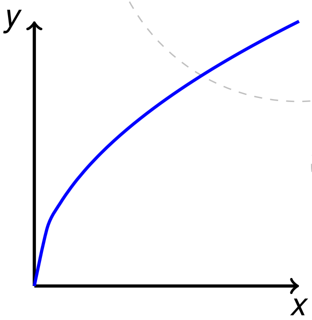
for alle x_1, x_2 for hvilke $f(x)$ er definert.

En funksjon f er injektiv hvis og bare hvis en hver horisontal linje høyest skjærer grafen til f en gang.

Eksempel 1

Eksempel 1

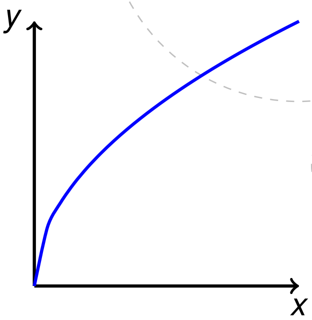
La $f(x) = \sqrt{x}$.



Eksempel 1

La $f(x) = \sqrt{x}$. Hvis $f(x_1) = f(x_2)$, er

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sqrt{x_1})^2 = (f(x_1))^2 = (f(x_2))^2 \\ &= (\sqrt{x_2})^2 = x_2. \end{aligned}$$

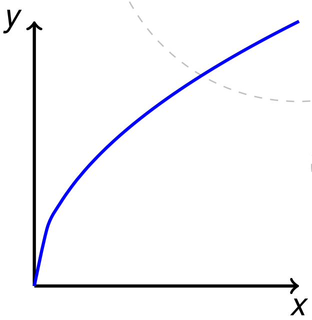


Eksempel 1

La $f(x) = \sqrt{x}$. Hvis $f(x_1) = f(x_2)$, er

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sqrt{x_1})^2 = (f(x_1))^2 = (f(x_2))^2 \\ &= (\sqrt{x_2})^2 = x_2. \end{aligned}$$

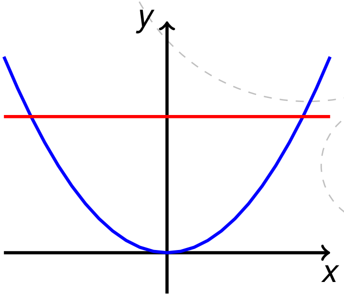
Altså er f injektiv.



Eksempel 2

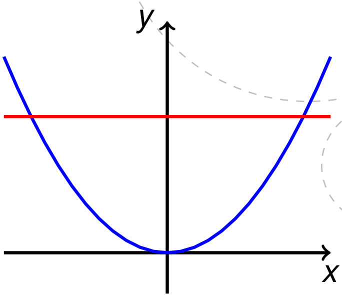
Eksempel 2

La $g(x) = x^2$.



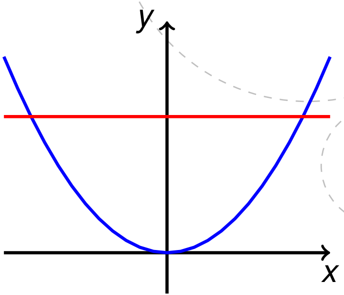
Eksempel 2

La $g(x) = x^2$.
Da er for eksempel $g(-1) = g(1)$.



Eksempel 2

La $g(x) = x^2$.
Da er for eksempel $g(-1) = g(1)$.
Altså er g ikke injektiv.



Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

- En funksjone er injektiv hvis den er strengt voksende eller avtagende.

Injektive funksjoner

- En funksjone er injektiv hvis den er strengt voksende eller avtagende.
- Så en funksjon f er injektiv hvis den er deriverbar og $f'(x) > 0$ for alle x eller $f'(x) < 0$ for alle x.

Inverse funksjoner

Inverse funksjoner

Definisjon 2

La f være en injektiv funksjon. Da er den *inverse funksjon* (eller *omvendte funksjon*) til f funksjonen f^{-1} definert ved at $f^{-1}(x)$ er det entydig bestemte tall y slik at $f(y) = x$.

Inverse funksjoner

Definisjon 2

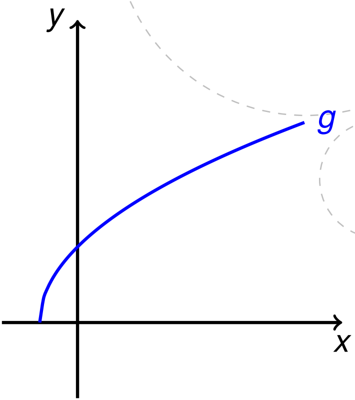
La f være en injektiv funksjon. Da er den *inverse funksjon* (eller *omvendte funksjon*) til f funksjonen f^{-1} definert ved at $f^{-1}(x)$ er det entydig bestemte tall y slik at $f(y) = x$.

Merk at $f^{-1}(x)$ bare er definert for de x for hvilke det finnes en y slik at $f(y) = x$.

Eksempel 3.1.2

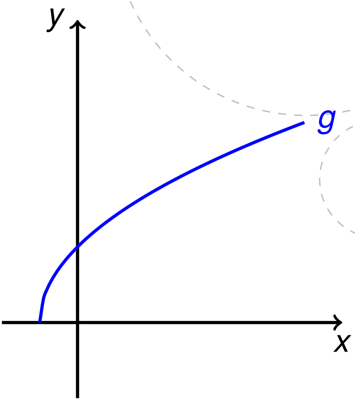
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$.



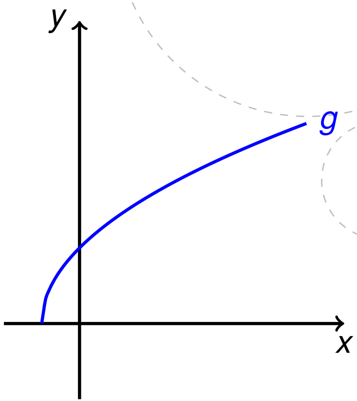
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.



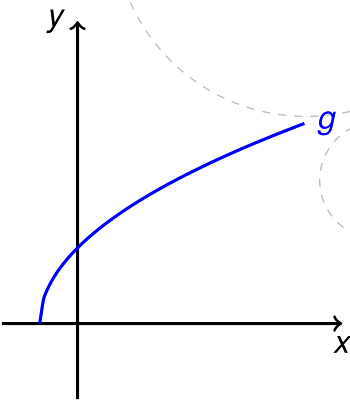
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er
$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$.



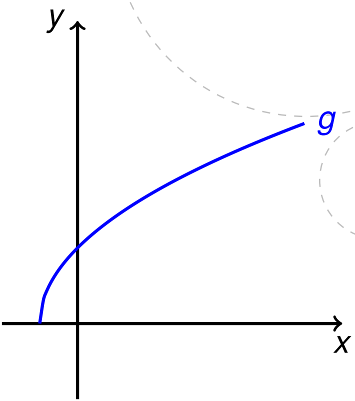
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er
$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv.



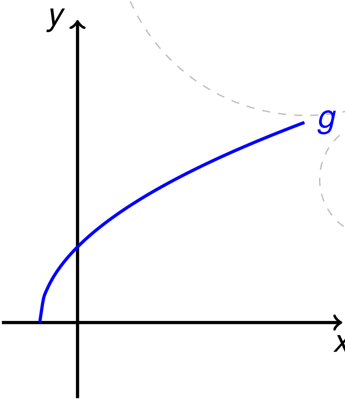
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.



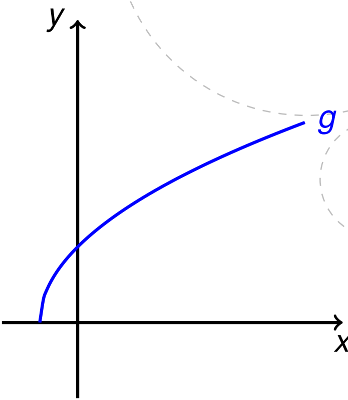
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.
La $y = g^{-1}(x)$.



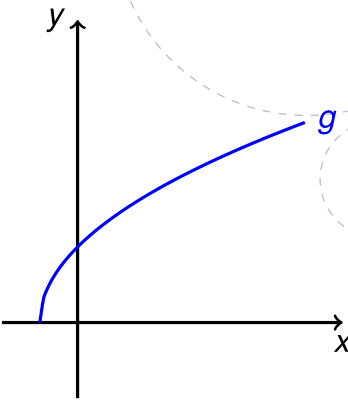
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.
La $y = g^{-1}(x)$. Da er
$x = g(y) = \sqrt{2y+1}$.



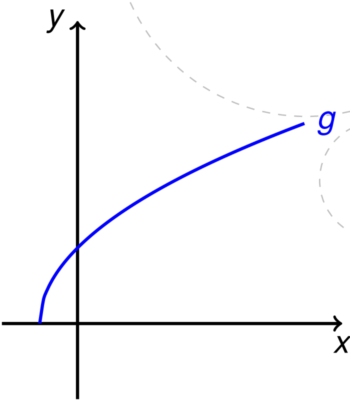
Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.
La $y = g^{-1}(x)$. Da er $x = g(y) = \sqrt{2y+1}$. Det følger at $x \geq 0$ og at $x^2 = 2y+1$.



Eksempel 3.1.2

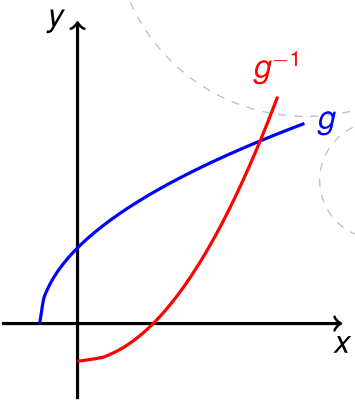
La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.
La $y = g^{-1}(x)$. Da er $x = g(y) = \sqrt{2y+1}$. Det følger at $x \geq 0$ og at $x^2 = 2y + 1$. Følgelig er $g^{-1}(x) = y = \frac{x^2-1}{2}$.



Eksempel 3.1.2

La $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Merk at $g(x)$ bare er definert for $x \geq -1/2$.
For alle $x > -1/2$ er $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$. g er altså strengt voksende og derfor injektiv. Så den inverse funksjonen g^{-1} eksisterer.
La $y = g^{-1}(x)$. Da er $x = g(y) = \sqrt{2y+1}$. Det følger at $x \geq 0$ og at $x^2 = 2y + 1$. Følgelig er $g^{-1}(x) = y = \frac{x^2-1}{2}$.
Vi har altså at g^{-1} er gitt ved at

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2} \text{ for } x \geq 0.$$



Egenskaper ved inverse funksjoner

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Det følger også at $f(f^{-1}(x)) = x$ og at $f(f^{-1}(y)) = y$.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Det følger også at $f(f^{-1}(x)) = x$ og at $f(f^{-1}(y)) = y$.

Hvis $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, så er

$$x_1 = f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Det følger også at $f(f^{-1}(x)) = x$ og at $f(f^{-1}(y)) = y$.

Hvis $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, så er

$$x_1 = f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Dvs. at f^{-1} er injektiv, og f^{-1} har derfor en inverse.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Det følger også at $f(f^{-1}(x)) = x$ og at $f(f^{-1}(y)) = y$.

Hvis $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, så er

$$x_1 = f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Dvs. at f^{-1} er injektiv, og f^{-1} har derfor en inverse. Vi har at $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f^{-1}(y) = x$, dvs. hvis og bare hvis $f(x) = y$.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Da har vi at $f^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f(y) = x$. Det følger at (x, y) ligger på grafen til f^{-1} hvis og bare hvis (y, x) ligger på grafen til f. Grafen til f^{-1} er altså speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Det følger også at $f(f^{-1}(x)) = x$ og at $f(f^{-1}(y)) = y$.

Hvis $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, så er

$$x_1 = f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Dvs. at f^{-1} er injektiv, og f^{-1} har derfor en inverse. Vi har at $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ hvis og bare hvis $f^{-1}(y) = x$, dvs. hvis og bare hvis $f(x) = y$. Dvs. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ for alle de x for hvilke $f(x)$ er definert.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

- Mengden av alle x for hvilke $f(x)$ er definert kaller vi for *definisjonsmengden* til f og betegnes med $\mathcal{D}(f)$.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

- Mengden av alle x for hvilke $f(x)$ er definert kaller vi for *definisjonsmengden* til f og betegnes med $\mathcal{D}(f)$.
- Mengden av alle verdier som $f(x)$ har kaller vi *verdimengden* til f og betegnes med $\mathcal{V}(f)$.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

- Mengden av alle x for hvilke $f(x)$ er definert kaller vi for *definisjonsmengden* til f og betegnes med $\mathcal{D}(f)$.
- Mengden av alle verdier som $f(x)$ har kaller vi *verdimengden* til f og betegnes med $\mathcal{V}(f)$.
- $\mathcal{V}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

- Mengden av alle x for hvilke $f(x)$ er definert kaller vi for *definisjonsmengden* til f og betegnes med $\mathcal{D}(f)$.
- Mengden av alle verdier som $f(x)$ har kaller vi *verdimengden* til f og betegnes med $\mathcal{V}(f)$.
- $\mathcal{V}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$.
- Hvis f er injektiv er $f^{-1}(x)$ bare definert for de x for hvilke det finnes en y slik at $f(y) = x$. Vi har altså at $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{V}(f)$.

Definisjonsmengden og verdimengden til en funskjon

La f være en funksjon.

- Mengden av alle x for hvilke $f(x)$ er definert kaller vi for *definisjonsmengden* til f og betegnes med $\mathcal{D}(f)$.
- Mengden av alle verdier som $f(x)$ har kaller vi *verdimengden* til f og betegnes med $\mathcal{V}(f)$.
- $\mathcal{V}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$.
- Hvis f er injektiv er $f^{-1}(x)$ bare definert for de x for hvilke det finnes en y slik at $f(y) = x$. Vi har altså at $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{V}(f)$.
- Omvendt har vi at $f(y)$ er definert hvis og bare hvis det finnes en x slik at $f^{-1}(x) = y$. Dvs. $\mathcal{D}(f) = \mathcal{V}(f^{-1})$.

Egenskaper ved inverse funksjoner

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f.

Egenskaper ved inverse funksjoner

La f være en injektiv funksjon og f^{-1} den inverse funksjonen til f. Da gjelder:

1. $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$.
2. Definisjonsmengden til f^{-1} er lik verdimengden til f.
3. Verdimengden til f^{-1} er lik definisjonsmengden til f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle x i definisjonsmengden til f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ for alle x i definisjonsmengden til f^{-1}.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ for alle x i definisjonsmengden til f.
7. Grafen til f^{-1} er speilingen til grafen for f i linjen $y = x$.

Selv-inverse funksjoner

Selv-inverse funksjoner

Definisjon 3

En funksjon f er *selv-inverse* hvis $f^{-1} = f$, dvs. $f(f(x)) = x$ for alle x i definisjonsmengden til f.

Eksempel 3

Eksempel 3

La $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Eksempel 3

La $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Da er $f(x)$ definert for alle $x \neq 1$,

Eksempel 3

La $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Da er $f(x)$ definert for alle $x \neq 1$, og

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x-1)} = \frac{x}{1} = x$$

for alle $x \neq 1$.

Eksempel 3

La $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Da er $f(x)$ definert for alle $x \neq 1$, og

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-(x-1)} = \frac{x}{1} = x$$

for alle $x \neq 1$.

Altså er f selv-inverse.

Den deriverte til inverse funksjoner

Den deriverte til inverse funksjoner

Anta at f er deriverbar på intervallet (a, b) og at $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller at $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Den deriverte til inverse funksjoner

Anta at f er deriverbar på intervallet (a, b) og at $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller at $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Da er f enten strengt voksende eller strengt avtagende på (a, b), så f er injektiv på (a, b).

Den deriverte til inverse funksjoner

Anta at f er deriverbar på intervallet (a, b) og at $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller at $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Da er f enten strengt voksende eller strengt avtagende på (a, b), så f er injektiv på (a, b). Altså er den inverse funksjonen f^{-1} definert.

Den deriverte til inverse funksjoner

Anta at f er deriverbar på intervallet (a, b) og at $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller at $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Da er f enten strengt voksende eller strengt avtagende på (a, b), så f er injektiv på (a, b). Altså er den inverse funksjonen f^{-1} definert.

En kan vise at f^{-1} er deriverbar.

Den deriverte til inverse funksjoner

Anta at f er deriverbar på intervallet (a, b) og at $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller at $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$.

Da er f enten strengt voksende eller strengt avtagende på (a, b), så f er injektiv på (a, b). Altså er den inverse funksjonen f^{-1} definert.

En kan vise at f^{-1} er deriverbar. Da $f(f^{-1}(x)) = x$ for alle $x \in (a, b)$ følger det av kjerneregelen og implisitt derivasjon at

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x))\frac{d}{dx}f^{-1}(x).$$

Den deriverte til inverse funksjoner

Altså er

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Den deriverte til inverse funksjoner

Altså er

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Hvis $y = f^{-1}(x)$ kan dette skrives som

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_x = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dx}\right|_{y=f^{-1}(x)}}.$$

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.
Da er $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ for alle x.

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.

Da er $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ for alle x. Det følger at f er strengt voksende og dermed injektiv, så den inverse funksjonen f^{-1} er definert.

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.

Da er $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ for alle x. Det følger at f er strengt voksende og dermed injektiv, så den inverse funksjonen f^{-1} er definert.

$f^{-1}(x)$ er deriverbar og

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.

Da er $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ for alle x. Det følger at f er strengt voksende og dermed injektiv, så den inverse funksjonen f^{-1} er definert.

$f^{-1}(x)$ er deriverbar og

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Da $f(1) = 2$ er $f^{-1}(2) = 1$,

Eksempel 4

La $f(x) = x^3 + x$.

Da er $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ for alle x. Det følger at f er strengt voksende og dermed injektiv, så den inverse funksjonen f^{-1} er definert.

$f^{-1}(x)$ er deriverbar og

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Da $f(1) = 2$ er $f^{-1}(2) = 1$, så

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \left. \frac{1}{3x^2 + 1} \right|_{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Eksponentialfunksjon

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$.

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$. Da er

- $a^0 = 1$,

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$. Da er

- $a^0 = 1$,
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots,$

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$. Da er

- $a^0 = 1$,
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}$ hvis $n = 1, 2, 3, \dots,$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \dots,$

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$. Da er

- $a^0 = 1$,
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$ og $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Eksponentialfunksjon

La $a > 0$. Da er

- $a^0 = 1$,
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}$ hvis $n = 1, 2, 3, \dots,$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \dots,$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ hvis $n = 1, 2, 3, \dots$ og $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Vi skal senere se at vi utvide definisjonen av a^x slik at a^x blir en deriverbar funksjon definert for alle x slik at a^x er som ovenfor hvis x er et rasjonalt tall.

Regneregler for eksponentialfunksjoner

Regneregler for eksponentialfunksjoner

Anta at $a > 0$ og $b > 0$ og at x og y er reelle tall.

Regneregler for eksponentialfunksjoner

Anta at $a > 0$ og $b > 0$ og at x og y er reelle tall. Da gjelder:

1. $a^0 = 1$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$
6. $(ab)^x = a^x b^x$.

Egenskaper ved eksponentialfunksjoner

Egenskaper ved eksponentialfunksjoner

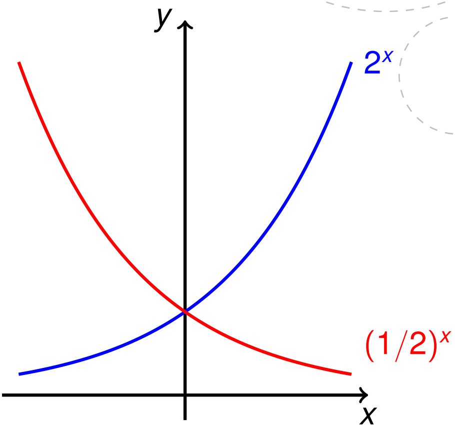
- Hvis $a > 1$ er $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ og $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Egenskaper ved eksponentialfunksjoner

- Hvis $a > 1$ er $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ og $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.
- Hvis $a \in (0, 1)$ er $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ og $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.

Egenskaper ved eksponentialfunksjoner

- Hvis $a > 1$ er $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ og $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$.
- Hvis $a \in (0, 1)$ er $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$ og $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$.



Logaritmer

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

- $\log_a x$ er karakterisert ved at $\log_a x = y \iff a^y = x$.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

- $\log_a x$ er karakterisert ved at $\log_a x = y \iff a^y = x$.
- Da verdimengden til a^x er $(0, \infty)$, er $\log_a x$ definert for alle $x > 0$.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

- $\log_a x$ er karakterisert ved at $\log_a x = y \iff a^y = x$.
- Da verdimengden til a^x er $(0, \infty)$, er $\log_a x$ definert for alle $x > 0$.
- Da definisjonsmengden til a^x er $(-\infty, \infty)$, er verdimengden til $\log_a x$ $(-\infty, \infty)$.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

- $\log_a x$ er karakterisert ved at $\log_a x = y \iff a^y = x$.
- Da verdimengden til a^x er $(0, \infty)$, er $\log_a x$ definert for alle $x > 0$.
- Da definisjonsmengden til a^x er $(-\infty, \infty)$, er verdimengden til $\log_a x$ $(-\infty, \infty)$.
- $a^{\log_a x} = x$ for alle $x > 0$.

Logaritmer

Hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ er funksjonen $f(x) = a^x$ injektiv og den har dermed en inverse funksjon.

Definisjon 5

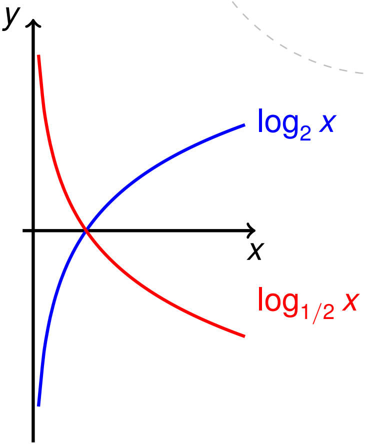
La $a > 0$ og $a \neq 1$. Funksjonen $\log_a x$ kalles *logaritmen med grunntall a* og er den inverse funksjonen til funksjonen a^x.

- $\log_a x$ er karakterisert ved at $\log_a x = y \iff a^y = x$.
- Da verdimengden til a^x er $(0, \infty)$, er $\log_a x$ definert for alle $x > 0$.
- Da definisjonsmengden til a^x er $(-\infty, \infty)$, er verdimengden til $\log_a x$ $(-\infty, \infty)$.
- $a^{\log_a x} = x$ for alle $x > 0$.
- $\log_a(a^x) = x$ for alle x.

Egenskaper ved logaritmer

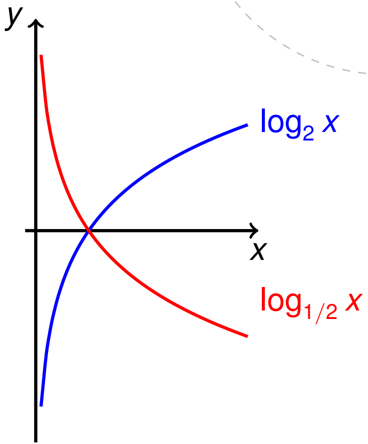
Egenskaper ved logaritmer

- Hvis $a > 1$ er
  $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ og
  $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$.



Egenskaper ved logaritmer

- Hvis $a > 1$ er
  $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ og
  $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$.
- Hvis $a \in (0, 1)$ er
  $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ og
  $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$.



Regneregler for logaritmer

Regneregler for logaritmer

Anta at $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ og $b \neq 1$.

Regneregler for logaritmer

Anta at $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ og $b \neq 1$. Da gjelder:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
4. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a(x^y) = y \log_a x$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Eksempel 5

Eksempel 5

La oss forenkle uttrykket
$\log_{\pi}(1-\cos x)+\log_{\pi}(1+\cos x)-2\log_{\pi}(\sin x)$.

Eksempel 5

La oss forenkle uttrykket
$\log_\pi(1-\cos x)+\log_\pi(1+\cos x)-2\log_\pi(\sin x)$.

$$
\begin{aligned}
&\log_\pi(1-\cos x)+\log_\pi(1+\cos x)-2\log_\pi(\sin x)\\
&\quad=\log_\pi\left(\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right)\\
&\quad=\log_\pi\left(\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\\
&\quad=\log_\pi\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)\\
&\quad=\log_\pi(1)=0.
\end{aligned}
$$

Eksempel 6

La oss løse likningen $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

Eksempel 6

La oss løse likningen $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

$$\begin{aligned}
& 2\log_3 x + \log_9 x = 10 \\
\iff\ & 2\log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = 10 \\
\iff\ & 2\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 10 \\
\iff\ & \log_3 x^{5/2} = 10 \\
\iff\ & x^{5/2} = 3^{10} \\
\iff\ & x = (3^{10})^{2/5} = 3^{20/5} = 3^4 = 81.
\end{aligned}$$