NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1, høst 2013

Forelesning 10

Derivasjon

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Antideriverte.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Antideriverte.
2. Differensiallikninger og initialverdiproblemer.

Derivasjon

I dagens forelesning skal vi se på følgende:

1. Antideriverte.
2. Differensiallikninger og initialverdiproblemer.
3. Hastighet, fart og akselerasjon.

Antideriverte

Antideriverte

Definisjon 7: Antideriverte

La f være en funksjon og I et intervall slik at $f(x)$ er definert for alle $x \in I$.
En funksjon F kalles en *antiderivert* til f på I dersom F er deriverbar på I og $F'(x) = f(x)$ for alle indre punkter x i I.

Eksempel 2.10.1 (d)

Eksempel 2.10.1 (d)

La $F(x) = -1/x$ og $f(x) = 1/x^2$.

Eksempel 2.10.1 (d)

La $F(x) = -1/x$ og $f(x) = 1/x^2$.

Da $F'(x) = 1/x^2 = f(x)$ for alle $x \neq 0$, er F en antiderivert til f på ethvert intervall som ikke inneholder 0.

Eksempel 2.10.1 (d)

La $F(x) = -1/x$ og $f(x) = 1/x^2$.

Da $F'(x) = 1/x^2 = f(x)$ for alle $x \neq 0$, er F en antiderivert til f på ethvert intervall som ikke inneholder 0.

Hvis C er en konstant og vi lar $G(x) = -1/x + C$, så er også $G'(x) = 1/x^2 = f(x)$, og dermed er også G en antiderivert til f på ethvert intervall som ikke inneholder 0.

Antideriverte

Antideriverte

Hvis F er en antiderivert til f på et intervall I, og C er en konstant, så er også $F + C$ en antiderivert til f på I fordi $(F + C)'(x) = F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$.

Antideriverte

Hvis F er en antiderivert til f på et intervall I, og C er en konstant, så er også $F + C$ en antiderivert til f på I fordi $(F + C)'(x) = F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$.

Omvendt, hvis F_1 og F_2 begge er antideriverte til en funksjon f på et intervall I, så er $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ for alle $x \in I$, fra hvilket det følger at det finnes en konstant C slik at $F_1 = F_2 + C$.

Antideriverte

Hvis F er en antiderivert til f på et intervall I, og C er en konstant, så er også $F + C$ en antiderivert til f på I fordi $(F + C)'(x) = F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$.

Omvendt, hvis F_1 og F_2 begge er antideriverte til en funksjon f på et intervall I, så er $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ for alle $x \in I$, fra hvilket det følger at det finnes en konstant C slik at $F_1 = F_2 + C$.

Vi har altså at hvis F er en antiderivert til f på et intervall I, så er $\{F + C \mid C \text{ er en konstant}\}$ mengden av samtlige antideriverte til f på I.

Det ubestemte integralet

Det ubestemte integralet

Definisjon 8: Det ubestemte integralet

La I være et intervall og f en funksjon definert på I. Det *ubestemte integralet* $\int f(x)dx$ er definert ved at

$$\int f(x)dx = F + C$$

der F er en antiderivert til f på I og C gjennomløper mengder av konstanter.

Det ubestemte integralet

Definisjon 8: Det ubestemte integralet

La I være et intervall og f en funksjon definert på I. Det *ubestemte integralet* $\int f(x)dx$ er definert ved at

$$\int f(x)dx = F + C$$

der F er en antiderivert til f på I og C gjennomløper mengder av konstanter.

Merk at definisjonen av $\int f(x)dx$ ikke avhenger av hvilken antiderivert F vi velger for hvis F_1 og F_2 begge er antideriverte til f på I er $F_1 - F_2$ en konstant, og dermed er $F_1 + C_1 = F_2 + C_2$ hvis C_1 og C_2 gjennomløper mengder av konstanter.

Noen ubestemte integraler

Noen ubestemte integraler

1. $\displaystyle\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ hvis $r \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$.
3. $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$.
4. $\displaystyle\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$.
5. $\displaystyle\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$.
6. $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x) dx = \sec(x) + C$.
7. $\displaystyle\int \csc(x)\cot(x) dx = -\csc(x) + C$.

Eksempel 1

Eksempel 1

Da $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ og $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ er

$$\int 6x^2 - 2\cos(x) dx = 2x^3 - 2\sin(x) + C.$$

Eksempel 1

Da $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ og $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ er

$$\int 6x^2 - 2\cos(x) dx = 2x^3 - 2\sin(x) + C.$$

La oss også bestemme integralet ved hjelp av Maple:

Eksempel 1

Da $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ og $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ er

$$\int 6x^2 - 2\cos(x) dx = 2x^3 - 2\sin(x) + C.$$

La oss også bestemme integralet ved hjelp av Maple:

$int(6\,x^2 - 2\cos(x), x);$

$$2\,x^3 - 2\sin(x)$$

Eksempel 1

Da $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ og $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ er

$$\int 6x^2 - 2\cos(x) dx = 2x^3 - 2\sin(x) + C.$$

La oss også bestemme integralet ved hjelp av Maple:

$int(6\,x^2 - 2\cos(x), x);$

$$2\,x^3 - 2\sin(x)$$

Merk at Maple ikke skriver $+C$.

Diffenrensialligninger

Diffenrensialligninger

En *differensialligning* er en ligning der det inngår en ukjent funksjon og deriverte av denne.

Diffenrensialligninger

En *differensialligning* er en ligning der det inngår en ukjent funksjon og deriverte av denne.

Enhver funksjon hvis deriverte oppfylle ligningen i alle punkter i et intervall I sies å være en *løsning* til differensialligning på I.

Eksempel 2

Eksempel 2

Ligningen $y' = x^3$ er en differensialligning.

Eksempel 2

Ligningen $y' = x^3$ er en differensialligning.

Da $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = x^3$ for alle x, er $y = \frac{1}{4}x^4$ er en løsning til differensialligningen $y' = x^3$ (på ethvert intervall).

Eksempel 2

Ligningen $y' = x^3$ er en differensialligning.

Da $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = x^3$ for alle x, er $y = \frac{1}{4}x^4$ er en løsning til differensialligningen $y' = x^3$ (på ethvert intervall).

For enhver konstant C er også $y = \frac{1}{4}x^4 + C$ en løsning til differensialligningen $y' = x^3$.

Eksempel 2

Ligningen $y' = x^3$ er en differensialligning.

Da $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = x^3$ for alle x, er $y = \frac{1}{4}x^4$ er en løsning til differensialligningen $y' = x^3$ (på ethvert intervall).

For enhver konstant C er også $y = \frac{1}{4}x^4 + C$ en løsning til differensialligningen $y' = x^3$.

Vi sier derfor at den *generelle løsningen* til $y' = x^3$ er $y = \frac{1}{4}x^4 + C$.

Eksempel 2

Ligningen $y' = x^3$ er en differensialligning.

Da $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = x^3$ for alle x, er $y = \frac{1}{4}x^4$ er en løsning til differensialligningen $y' = x^3$ (på ethvert intervall).

For enhver konstant C er også $y = \frac{1}{4}x^4 + C$ en løsning til differensialligningen $y' = x^3$.

Vi sier derfor at den *generelle løsningen* til $y' = x^3$ er $y = \frac{1}{4}x^4 + C$.

La oss se hvordan vi kan løse differensialligningen $y' = x^3$ ved hjelp av Maple:

$dsolve\left(diff(y(x), x) = x^3\right);$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \_C1$$

Initialverdiproblemer

Initialverdiproblemer

Generelt inneholder løsningen til en differensialligning konstanter.

Initialverdiproblemer

Generelt inneholder løsningen til en differensialligning konstanter.

Often tilføyer man derfor *initialbetingelser* (eller *randbetingelser*) for å bestemme disse konstanter.

Initialverdiproblemer

Generelt inneholder løsningen til en differensiallígning konstanter.

Often tilføyer man derfor *initialbetingelser* (eller *randbetingelser*) for å bestemme disse konstanter. Dermed får man et *initialverdiproblem*:

Et *initialverdiproblem* består av:

1. En differensiallígning.
2. En liste av verdier som løsningen til differensiallígningen og tilstrekkelig mange av dens deriverte har i et bestemt punkt slik at alle konstanter i løsningen er entydig bestemt.

Eksempel 3

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Løsningen til differentialligningen $y' = \sin(2x)$ er $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$.

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Løsningen til differentialligningen $y' = \sin(2x)$ er $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$. Hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = \frac{1}{2} + C$,

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Løsningen til differentialligningen $y' = \sin(2x)$ er $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$. Hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = \frac{1}{2} + C$, så hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = 1$ hvis og bare hvis $C = \frac{1}{2}$.

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Løsningen til differentialligningen $y' = \sin(2x)$ er $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$. Hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = \frac{1}{2} + C$, så hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = 1$ hvis og bare hvis $C = \frac{1}{2}$.

Løsningen til initialverdiproblemet (1) er derfor $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$.

Eksempel 3

La oss løse initialverdiproblemet

$$y' = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1. \tag{1}$$

Løsningen til differentialligningen $y' = \sin(2x)$ er $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$. Hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = \frac{1}{2} + C$, så hvis $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$ er $y(\pi/2) = 1$ hvis og bare hvis $C = \frac{1}{2}$.

Løsningen til initialverdiproblemet (1) er derfor $y(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$.

La oss se hvordan vi kan løse initialverdiproblemet ved hjelp av Maple:

$$dsolve\left(\left\{diff(y(x), x) = \sin(2\,x), y\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right) = 1\right\}\right);$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(2\,x) + \frac{1}{2}$$

Eksempel 4

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \tag{2}$$

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \qquad (2)$$

Hvis $y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}$ er $y'(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C_1$,

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \tag{2}$$

Hvis $y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}$ er $y'(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C_1$, og hvis i tillegg $y'(1) = 2$ er $C_1 = 2 - \frac{5}{3} + 6 = \frac{19}{3}$.

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \tag{2}$$

Hvis $y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}$ er $y'(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C_1$, og hvis i tillegg $y'(1) = 2$ er $C_1 = 2 - \frac{5}{3} + 6 = \frac{19}{3}$.

Det følger da at $y(x) = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + C_2$,

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \qquad (2)$$

Hvis $y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}$ er $y'(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C_1$, og hvis i tillegg $y'(1) = 2$ er $C_1 = 2 - \frac{5}{3} + 6 = \frac{19}{3}$.

Det følger da at $y(x) = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + C_2$, og hvis i tillegg $y(1) = 1$ er $C_2 = 1 - \frac{5}{12} + 4 - \frac{19}{3} = \frac{-7}{4}$.

Eksempel 4

La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}, \qquad y'(1) = 2, \qquad y(1) = 1. \qquad (2)$$

Hvis $y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2}$ er $y'(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C_1$, og hvis i tillegg $y'(1) = 2$ er $C_1 = 2 - \frac{5}{3} + 6 = \frac{19}{3}$.

Det følger da at $y(x) = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + C_2$, og hvis i tillegg $y(1) = 1$ er $C_2 = 1 - \frac{5}{12} + 4 - \frac{19}{3} = \frac{-7}{4}$.

Løsningen til initialverdiproblemet (2) er derfor
$y(x) = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x - \frac{7}{4}$.

Eksempel 4

La oss se hvordan vi kan løse initialverdiproblemet ved hjelp av Maple:

$$dsolve\left(\left\{diff\,(y(x), x\$2) = 5\,x^2 - 3\,x^{-\frac{1}{2}}, \mathrm{D}\,(y)\,(1) = 2, y(1) = 0\right\}\right);$$

$$y(x) = -4\,x^{3/2} + \frac{5}{12}\,x^4 + \frac{19}{3}\,x - \frac{11}{4}$$

Hastighet, fart og akselerasjon

Hastighet, fart og akselerasjon

Anta at en gjenstand beveger seg langs en rett linje (x-aksen), slik at dens posisjon x er en funksjon av tiden t.

Hastighet, fart og akselerasjon

Anta at en gjenstand beveger seg langs en rett linje (x-aksen), slik at dens posisjon x er en funksjon av tiden t. Da er:

- $x(t)$ gjenstandens *posisjon* til tiden t.
- $x'(t)$ gjenstandens *hastighet* til tiden t.
- $|x'(t)|$ gjenstandens *fart* til tiden t.
- $x''(t)$ gjenstandens *akselerasjon* til tiden t.

Eksempel 2.11.2

Eksempel 2.11.2

Anta at en gjenstand beveger seg langs x-aksen slik at dens posisjon til tiden t er $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ m der t måles i sekunder.

Eksempel 2.11.2

Anta at en gjenstand beveger seg langs x-aksen slik at dens posisjon til tiden t er $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ m der t måles i sekunder. Da er

- $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ m/s gjenstandens hastighet til tiden t,

Eksempel 2.11.2

Anta at en gjenstand beveger seg langs x-aksen slik at dens posisjon til tiden t er $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ m der t måles i sekunder. Da er

- $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ m/s gjenstandens hastighet til tiden t,
- $|x'(t)| = |6t^2 - 30t + 24|$ m/s gjenstandens fart til tiden t,

Eksempel 2.11.2

Anta at en gjenstand beveger seg langs x-aksen slik at dens posisjon til tiden t er $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ m der t måles i sekunder. Da er

- $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ m/s gjenstandens hastighet til tiden t,
- $|x'(t)| = |6t^2 - 30t + 24|$ m/s gjenstandens fart til tiden t,
- $x''(t) = 12t - 30$ m/s^2 gjenstandens fart til tiden t.

Eksempel 2.11.2

Anta at en gjenstand beveger seg langs x-aksen slik at dens posisjon til tiden t er $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ m der t måles i sekunder. Da er

- $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ m/s gjenstandens hastighet til tiden t,
- $|x'(t)| = |6t^2 - 30t + 24|$ m/s gjenstandens fart til tiden t,
- $x''(t) = 12t - 30$ m/s^2 gjenstandens fart til tiden t.

For eksempel er gjenstandens fart til tiden $t = 2$ lik $|x'(2)| = |-12| = 12$ m/s.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1, 4)$.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1, 4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0, 1)$ og $(4, \infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1, 4)$.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1, 4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0, 1)$ og $(4, \infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1, 4)$.

Vi ser at $x''(t) = 12t - 30$ er negativ for $t <$2,5 og positiv for $t >$2,5.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1, 4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0, 1)$ og $(4, \infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1, 4)$.

Vi ser at $x''(t) = 12t - 30$ er negativ for $t <$2,5 og positiv for $t >$2,5. Vi har altså at gjenstanden senker hastigheten fram til $t =$2,5 og deretter øker hastigheten,

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1,4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0,1)$ og $(4,\infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1,4)$.

Vi ser at $x''(t) = 12t - 30$ er negativ for $t <$2,5 og positiv for $t >$2,5. Vi har altså at gjenstanden senker hastigheten fram til $t =$2,5 og deretter øker hastigheten, men gjenstanden senker farten fram til $t = 1$ der den svinger rundt og beveger seg i den annen retningen.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1,4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0,1)$ og $(4,\infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1,4)$.

Vi ser at $x''(t) = 12t - 30$ er negativ for $t <$2,5 og positiv for $t >$2,5. Vi har altså at gjenstanden senker hastigheten fram til $t =$2,5 og deretter øker hastigheten, men gjenstanden senker farten fram til $t = 1$ der den svinger rundt og beveger seg i den annen retningen. Fra $t = 1$ til $t =$2,5 øker gjenstanden farten, og fra $t =$2,5 senker den farten fram til $t = 4$ der den igjen svinger rundt.

Eksempel 2.11.2

Vi ser at $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4)$ er positiv for $t < 1$ og $t > 4$ og negativ for $t \in (1, 4)$. Vi har altså at gjendstanden beveger seg mot høyre i tidsrommet $[0, 1)$ og $(4, \infty)$ og mot venstre i tidsrommet $(1, 4)$.

Vi ser at $x''(t) = 12t - 30$ er negativ for $t <$2,5 og positiv for $t >$2,5. Vi har altså at gjenstanden senker hastigheten fram til $t =$2,5 og deretter øker hastigheten, men gjenstanden senker farten fram til $t = 1$ der den svinger rundt og beveger seg i den annen retningen. Fra $t = 1$ til $t =$2,5 øker gjenstanden farten, og fra $t =$2,5 senker den farten fram til $t = 4$ der den igjen svinger rundt. Fra $t = 4$ bare øker gjenstanden bare farten (som vil vokse ubegrenset mot uendelig).