

Numerisk integrasjon

- Trapes kap 6.6
- Simpson kap 6.7
- Taylorpol kap 6.8
- Annet kap 6.8

The trapezoid rule

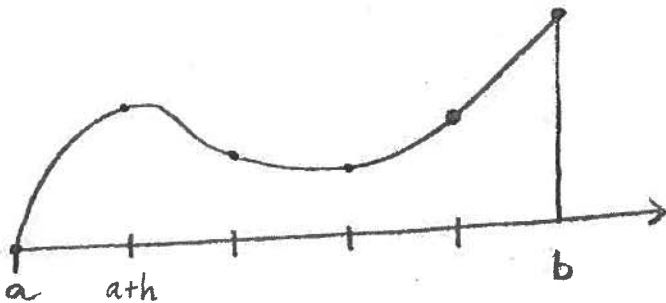
Boka: Midpoint rule - les selv

- Trapesmetoden
- Linearisering
- Splines

Mål

- Kunne bruke trapesmetoden og finne feilestimat for denne.

Lineære Splines



Tegn inn lineariseringen

Trapecmetoden med steglengde h

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

hvor $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a+h)$, ..., $y_n = f(b)$

Feilformel for trapes

$$E_n = \int_a^b f(x) dx - T_n$$

$$|E_n| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2$$

$$K: |f''(x)| \leq K \text{ på } [a, b]$$

Feilen proporsjonal med $(b-a)$

Feilen proporsjonal med h^2

Likner dette på feilen for Taylor?

$$|E_{n, \text{Taylor}}| \leq \frac{M}{2!} (x-a)^2, \quad |f''(s)| \leq M$$

Ja, med $h = (x-a)^2$, $M = K$, og litt til.

Eksempel

Integrer e^{-x^2} fra 0 til 2

Merk

• Vi vet ikke hvordan $\int e^{-x^2}$ skal gjøres

• Fasiten er: "Vi har funnet opp en ny funksjon som er erf(x) med

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{erf}(x)$$

• Hva er erf(2)?

$$\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx \quad \text{per def.}$$

• Vi skal finne dette numerisk

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx, f(x) = e^{-x^2}, \text{ velger } h = \frac{1}{4} = 0,25$$

så får $y_0 = f(0), \dots, y_8 = f(2)$

$$h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{y_8}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-0}}{2} + e^{-\frac{1}{16}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1} \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{25}{16}} + e^{-\frac{36}{16}} + e^{-\frac{49}{16}} + \frac{e^{-4}}{2} \right)$$

MatLab = 0.88173791
 Maple
 Calculator

Feilen

$$f' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$f'' = e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 + e^{-x^2} \cdot (-2)$$

$$f'' = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2)$$

positiv for $4x^2 - 2 > 0$

$$x^2 > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x > \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7$$

Derivere for å finne max?

Vi velger å prøve et direkte estimat

$$|f''(x)| \leq |e^{-x^2}| \cdot |4x^2 - 2| \leq |e^{-0}| \cdot |4 \cdot 2^2 + 2|$$

$$\leq 1 \cdot 18$$

blir tullete!

Vil finne
 $|f''(x)| \leq K$

Digresjon

Finn maksverdi til

$$g(x) = f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

Matte1 Pensum fra før gir

$$\frac{4}{e^{3/2}} \text{ ved } x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Jeg var lat:
Wolfram Alpha

Velger $K = 0.893$

Feilen $E_8 = \int_0^2 f - T_8$ begrenses/estimeres

$$|E_8| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{0.893 \cdot 2}{12} \cdot 0,25^2$$

$$|E_8| \leq 0.0093$$

Svaret

Med Trapez med steglengde 0,25 får

$$\text{vi } \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,8817 \pm 0,0093$$

dvs.

$$0,8724 \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq 0,8910$$

Det sanne svaret
er 0,882081...

Merk: Svaret er bedre enn hva

feilestimatet får oss til å tro!

Simpson's Rule

- Simpson's regel
- Kvadratiske Splines
- Mål
 - Bruke Simpson til å integrere numerisk

Quadratic Splines

- Google image
- Vi tilnærmer $f(x)$ med $ax^2 + bx + c$ andregradsfunksjoner \rightarrow

Integrasjonsformel

Trust me

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

Boka p 377

Feilformel

$$|E_n| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4$$

$$|f^{(4)}(x)| \leq K$$

Note

Er det ikke fantastisk at vi med de samme y_i som i Trapez kan få mye bedre tilnærming?

Ja, så lenge!

Eksempel

○ $\int_0^2 f(x) dx$ med $f(x) = e^{-x^2}$

Simpsons med $h = 0,25$

$$S_8 = \frac{0,25}{3} (e^{-0} + 4e^{-\frac{1}{16}} + 2e^{-\frac{1}{4}} + 4e^{-\frac{9}{16}} + 2e^{-1} + 4e^{-\frac{25}{16}} + 2e^{-\frac{36}{16}} + 4e^{-\frac{49}{16}} + 1e^{-4})$$

○ $S_8 \approx 0,88206551$

Digresjon

$$f''''(x) = 4e^{-x^2} (4x^4 - 12x^2 + 3)$$

Regn ut

Maximize denne på $x \in [0, 2]$

gir maks 12 ved $x = 0$

Mye
utregning
W.A.

○ Feilen

$$|E_8| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{12 \cdot 2}{180} 0,25^4 \approx 0,00052$$

Svaret

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,88206 \pm 0,00052$$

Trapes: $0,8817 \pm 0,0093$

Sann: $0,88208$

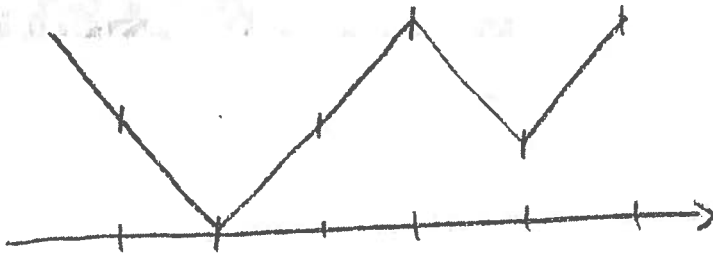
Trapes VS. Simpson

- Simpson bedre når $f^{(4)}(x)$ finnes og ikke er for stor (ca 100)
- Like mye "arbeid" å regne ut
- Trapes bedre når $f'(x)$ ikke finnes

Generelt

- Pene funksjoner gir bedre resultat når man bruker metoder som er mer avanserte / høyere orden.

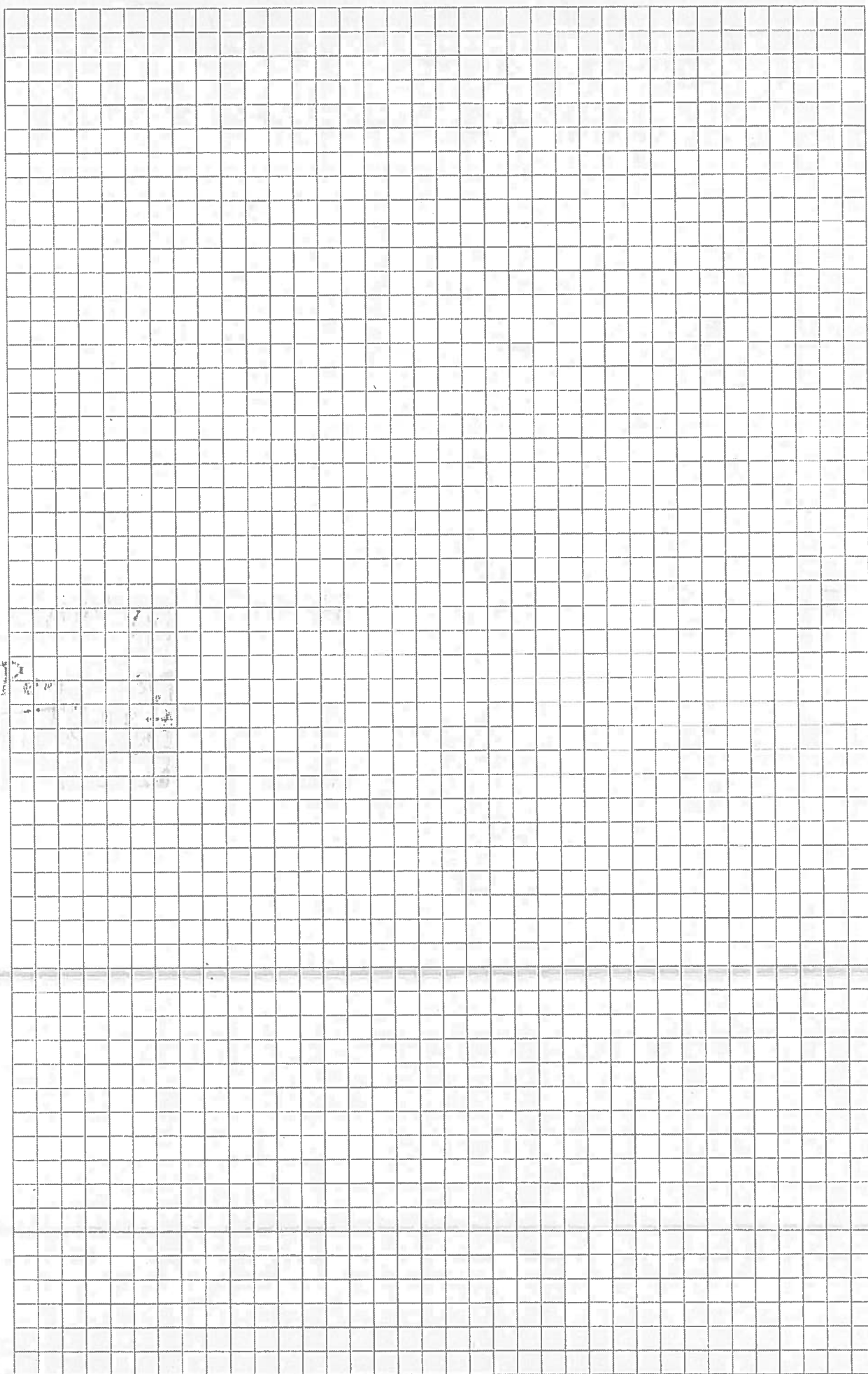
Ikke-Pen funksjon



Trapec : Perfekt

Simpson :





Taylorintegrasjon

For Notat M1 kap 6.8

Mål

- Finne integraler numerisk ved å bruke Taylor-polynom og integrere polynomene

! Dette er den vanskeligste og mest relevante (eksamen) delen av 6.8.

Les selv i boka:

- Approx. Improper Integrals
- Romberg Integration
- The Importance of Higher-Order Methods

Metode

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \begin{pmatrix} a=0 \\ b=2 \end{pmatrix}$$

1) Finn Taylor til $f(x)$.

$P_n(x)$ er grad n Taylor

2) Integrer $\int P_n(x) dx \approx \int f(x) dx$

og finn estimat

3) Finn feilestimat ved å

"Integrere feilen"

"Se på det integrerte polynomet"

Eksempel

○ Finn $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

Som før
 $f(x) = e^{-x^2}$

Taylor til $f(x)$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$$

○ Som er $\equiv f(x)$, og er et polynom,
derfor må det være Taylor til $f(x)$.

Integrer

$$\int e^{-x^2} = \int 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} \dots$$

$$= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} \frac{x^5}{2!} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} + \dots$$

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx = 2 - \frac{1}{3} 2^3 + \frac{1}{5} \frac{2^5}{2!} - \frac{1}{7} \frac{2^7}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2n} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{n!} + \dots$$

Estimer

Velger $n = 4$

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx -0,5...$$

uhoh!

Se plot! (W.A.)

La oss plote for større n
for å se hva som skjer...

... PLOTS på PC

... vi får det ikke til!

Ny oppgave

Finne $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Estimer

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1^5}{2!} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1^7}{3!}$$
$$\approx 0,742857$$

Estimer feil

Antakelse: Vi har annenhver + og -
Så feilen mindre enn neste ledd.

$$|E_4| \leq \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1^9}{4!} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8 \cdot 3} = \frac{1}{192} \approx 0,005$$

Sant svar: 0,746824

Kap 7

- Integrasjon på vanskelige områder
 - se oversikt
- Veldig eksamensrelevant
- Forståelsen veldig viktig senere
 - Matte 2
 - Fysikk
 - Ingeniørfag

Starteksempel

La $f(x) = \frac{1}{x}$ for

$x \in [1, \sqrt{2}]$. Drei $f(x)$

rundt x -aksen.

Hvor stort blir volumet?

Løsning

Boka: 7.1. EX 3
side 394

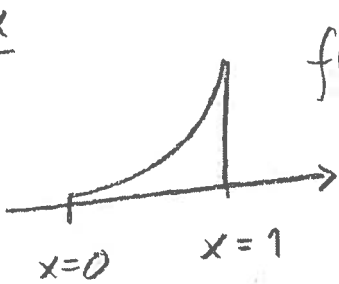
Forklaring /
Metoden kommer
etterpå

Oppdeling

$$A = \int \Delta A = \int dA$$

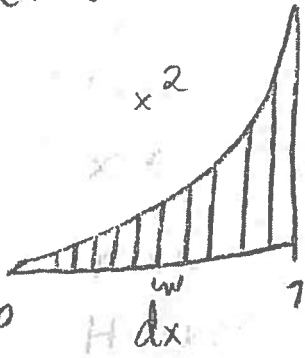
$$V = \int \Delta V = \int dV$$

EX



$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

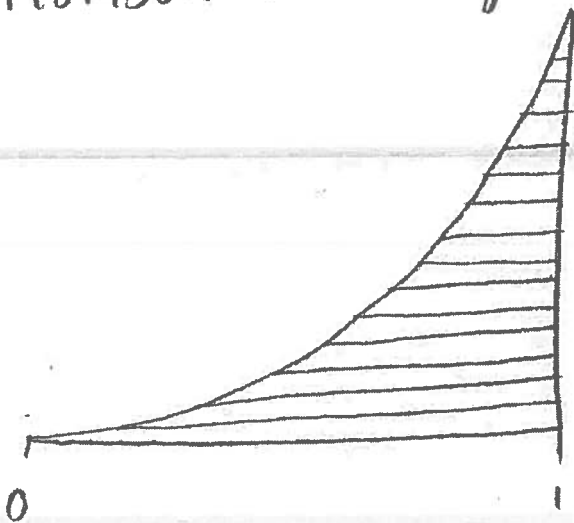
Vertikal deling



$$A = \int dA = \int dx \cdot h$$

$$A = \int_{x=0}^1 dx \cdot f(x) = \int_{x=0}^1 f(x) dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Horisontal deling



$$A = \int dA = \int_{y=0}^1 b \cdot dy$$

$$b = "x=1" - "x=\sqrt{y}"$$

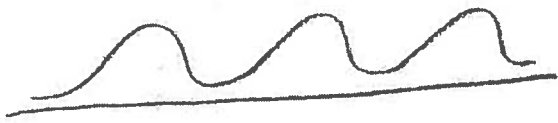
$$b = 1 - \sqrt{y}$$

$$A = \int_0^1 (1 - y^{1/2}) dy = \left[y - \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Test 7.T1

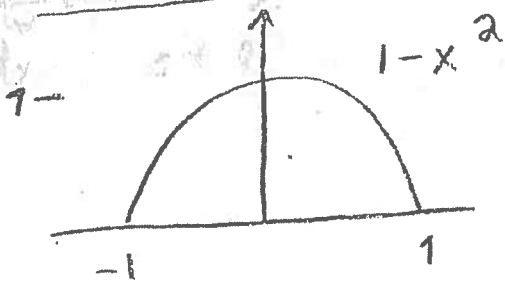
side 3

○ Kan vi dele opp



	Horisontalt	Vertikalt
a)	Ja	Ja
b)	Ja	Nei
c)	Nei	Ja
d)	Nei	Nei

Test 7.T2



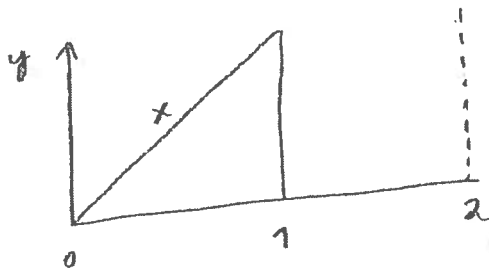
Del opp i
horisontale
striper

a) $A = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx$

b) $A = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y} dy$

c) $A = \int_0^1 \sqrt{1-y} - (-\sqrt{1-y}) dy$

Eksempel



Finn volumet av legemet begrenset
 av $y=0$, $y=x$, $x=1$ dreid rundt
 $x=2$.

Løsning

side 4

Boka:
7.1.8
$b=2$
$a=1$

Gjør begge måtene

Eksempel 2

- To (sirkulære) sylindre, med radius 1, skjærer hverandre slik at senter-aksene møter hverandre rett vinklet. Finn volumet av det området som ligger innenfor begge sylindrene.

side 5

Boka:
7.2.EX 3
p402

Løsning

1. Tegn de forskjellige forståelsene av oppgaven.

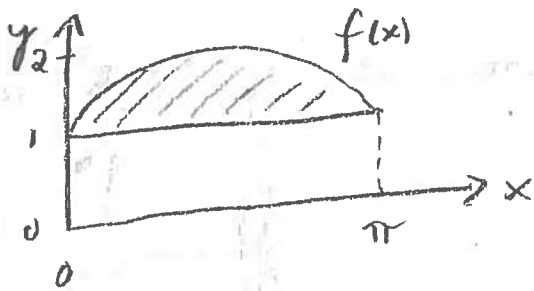
Eksempel 3

R is bounded by
 $y = 1 + \sin(x)$ and $y = 1$
 from $x = 0$ to $x = \pi$.

Find the volume when rotating
 about the

a) x -axis

b) y -axis

Løsning

x -axis

$$A = \int dA = \int dx \cdot (\pi r^2 - \pi \cdot 1^2) = \int_{x=0}^{\pi} \pi (f(x)^2 - 1) dx$$

$$A = \int_0^{\pi} \pi (2 \sin x + \sin^2 x) dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} 2 \sin x + \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \pi \left[-2 \cos x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \left(-2 - 2 + \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\pi \left(4 + \frac{\pi}{2} \right)}}$$

x-axis horizontal

side 7

$$A = \int dA = \int dy \cdot 2\pi r \cdot h, \quad r = y$$

$$h = ? \quad y = 1 + \sin x \quad x = \arcsin(y-1)$$

$$h = (\pi - \arcsin(y-1)) - \arcsin(y-1)$$

$$A = \int_0^2 2\pi y (\pi - 2\arcsin(y-1))$$

$$y=1$$

$$A = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi(8+\pi)}}$$

W. Alpha

b) y-axis vertikal

$$A = \int dA = \int dx \cdot 2\pi r \cdot h$$

$$r = x$$

$$h = f(x)$$

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi x \cdot (\sin x) dx$$

$$x=0$$

$$A = \underline{\underline{\pi^2 \cdot 2}}$$

W. Alpha

y-axis horizontal

side 8

$$A = \int dA = \int \pi r^2 \cdot dy$$

$$r^2 = (\pi - \arcsin(y-1))^2 - \arcsin(y-1)^2$$

$$A = \pi \int_{y=1}^2 (\pi - \arcsin(y-1))^2 - \arcsin(y-1)^2 dy$$

$$A = \pi \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

W. Alpha

y-axis

A = \int dA