Numerisk integrasjon

- Trapes kap 6.6
- Simpson kap 6.7
- Taylorpol kap 6.8
- Annet kap 6.8

The trapezoid rule

- Trapesmetoden
- Linearisering
- Splines

Boka: Midpoint rule - les selv

Mål

- Kunne bruke trapesmetoden og finne feilestimat for denne.

Lineære Splines

Tegn inn lineariseringen

Trapesmetoden med steglengde h

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

hvor $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a+h), \dots, y_n = f(b)$

Feilformel for trapes

$$E_n = \int_a^b f(x)\,dx - T_n$$

$K:\ |f''(x)| \leq K$ på $[a,b]$

$$|E_n| \leq \frac{K\,(b-a)}{12} h^2$$

Feilen proposjonal med $(b-a)$

Feilen proposjonal med h^2

Likner dette på feilen for Taylor?

$$|E_{1,Taylor}| \leq \frac{M}{2!}(x-a)^2, \quad |f''(s)| \leq M$$

Ja, med $h = (x-a)^2$, $M = K$, og litt til.

Eksempel

Integrer e^{-x^2} fra 0 til 2

Merk

- Vi vet ikke hvordan $\int e^{-x^2}$ skal gjøres
- Fasiten er: "Vi har funnet opp en ny funksjon som er erf(x) med

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{erf}(x)$$

- Hva er erf(2)?

$$\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \quad \text{per def.}$$

- Vi skal finne dette numerisk

$\int_0^2 e^{-x^2} dx$, $f(x) = e^{-x^2}$, velger $h = \frac{1}{4} = 0,25$

så får $y_0 = f(0), \ldots, y_8 = f(2)$

$$h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{y_8}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-0}}{2} + e^{-\frac{1}{16}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1} + e^{-\frac{25}{16}} + e^{-\frac{36}{16}} + e^{-\frac{49}{16}} + \frac{e^{-4}}{2}\right)$$

$= \ldots$ MatLab / Maple / Calculator $\ldots = 0.88173791$

Feilen

Vil finne $|f''(x)| \leq K$

$$f' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$f'' = e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 + e^{-x^2}(-2)$$

$$f'' = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2)$$

positiv for $4x^2 - 2 > 0$

$$x^2 > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x > \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0,7$$

Derivere for å finne max?

Vi velger å prøve et direkte estimat

$$|f''(x)| \leq |e^{-x^2}||4x^2 - 2| \leq |e^{-0}||4 \cdot 2^2 + 2|$$

$$\leq 1 \cdot 18$$

blir tullete!

Digresjon

Finn maksverdi til

$$g(x) = f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

Matte 1 Pensum fra før gir

$$\frac{4}{e^{3/2}} \text{ ved } x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Jeg var lat: Wolfram Alpha

Velger $K = 0.893$

Feilen $E_8 = \int_0^2 f - T_8$ begrenses/estimeres

$$|E_8| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{0.893 \cdot 2}{12} \cdot 0{,}25^2$$

$$|E_8| \leq 0.0093$$

Svaret

Med Trapes med steglengde 0,25 får

vi $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}8817 \pm 0{,}0093$

dvs.

$$0{,}8724 \leq \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \leq 0{,}8910$$

Det sanne svaret er 0,882081...

Merk: Svaret er bedre enn hva feilestimatet får oss til å tro!

Simpson's Rule

- Simpsons regel

• Kvadratiske Splines

Mål

• Bruke Simpson til å integrere numerisk

Quadratic Splines

• Google image

• Vi tilnærmer $f(x)$ med ax^2+bx+c

andregradsfunksjoner

Integrasjons formel

Trust me

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Boka p377

Feilformel

$$|E_n| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 \qquad |f''''(x)| \leq K$$

Note

Er det ikke fantastisk at vi med de samme y_i som i Trapes kan få mye bedre tilnerming?

Ja, så lenge

Eksempel

$$\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{med} \quad f(x) = e^{-x^2}$$

Simpsons med $h = 0{,}25$

$$S_8 = \frac{0{,}25}{3}\left(e^{-0} + 4e^{-\frac{1}{16}} + 2e^{-\frac{1}{4}} + 4e^{-\frac{9}{16}} + 2e^{-1} + 4e^{-\frac{25}{16}} + 2e^{-\frac{36}{16}} + 4e^{-\frac{49}{16}} + 1e^{-4}\right)$$

$$S_8 \approx 0{,}88206551$$

Digresjon

$\boxed{\text{Regn ut}}$

$$f''''(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$$

Maximize denne på $x \in [0,2]$

gir maks 12 ved $x = 0$

$\boxed{\text{Mye utregning W.A.}}$

Feilen

$$|E_8| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{12 \cdot 2}{180}0{,}25^4 \approx 0{,}00052$$

Svaret

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx 0{,}88206 \pm 0{,}00052$$

Trapes: $0{,}8817 \quad \pm 0{,}0093$

Sann: $0{,}88208$

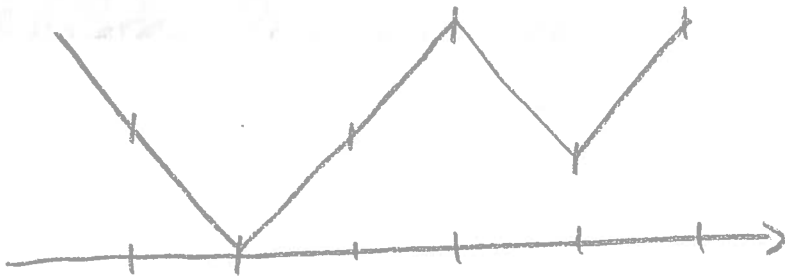
Trapes VS. Simpson

- Simpson bedre når $f^{(4)}(x)$ finnes og ikke er for stor (ca 100)
- Like mye "arbeid" å regne ut
- Trapes bedre når $f'(x)$ ikke finnes

Generelt

Pene funksjoner gir bedre resultat når man bruker metoder som er mer avanserte / høyere orden.

Ikke-Pen funksjon



Trapes: Perfekt

Simpson:

For Notat M1 kap 6.8

Taylorintegrasjon

Les selv i boka:
· Approx. Improper Integrals
· Romberg Integration
· The Importance of Higher-Order Methods

Mål

- Finne integraler numerisk ved å bruke Taylor-polynom og integrere polynomene

! Dette er den vanskeligste og mest relevante (eksamen) delen av 6.8.

Metode

$$\int_a^b f(x)\,dx = ? \qquad f(x) = e^{-x^2} \quad \begin{pmatrix} a=0 \\ b=2 \end{pmatrix}$$

1) Finn Taylor til $f(x)$
   $P_n(x)$ er grad n taylor

2) Integrer $\int P_n(x)\,dx \approx \int f(x)\,dx$
   og finn estimat

3) Finn feilestimat ved å
   "Integrere feilen"
   "Se på det integrerte polynomet"

Eksempel

Finn $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$

$\boxed{\text{Som før } f(x) = e^{-x^2}}$

Taylor til $f(x)$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$$

Som er $\equiv f(x)$, og er et polynom, derfor må det være Taylor til $f(x)$.

Integrer

$$\int e^{-x^2} = \int 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} \dots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}\frac{x^5}{2!} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2n}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} + \dots$$

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx = 2 - \frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{5}\frac{2^5}{2!} - \frac{1}{7}\frac{2^7}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2n}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{n!} + \dots$$

Estimer

Velger $n=4$

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx -0,5\ldots$$

uhoh!

Se plot! (W.A.)

La oss plotte for større n for å se hva som skjer...

PLOTS på PC

... vi får det ikke til!

Ny oppgave

Finn $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Estimer

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1^5}{2!} - \frac{1}{7}\,\frac{1^7}{3!}$$

$$\approx 0,742857$$

Estimer feil

Antakelse: Vi har annenhver + og − ledd.
Så feilen mindre enn neste ledd.

$$|E_4| \leq \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1^9}{4!} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8\cdot 3} = \frac{1}{192} \approx 0,005$$

$\boxed{\text{Sant svar: } 0,746824}$