Forelesningsnotat M1 Kap 5.4

5min repetisjon fra forrige uke

Kap 5.4

Mål:

- Se at regnereglene for integrasjon kommer fra summeregler
- Dele opp integrasjonen når funksjonen er piecewise continuous (gitt ved delt forskrift)

Husk

- $\int_a^b$ betyr $\overset{b}{\underset{a}{I}}$ "arealet under grafen"
- Vi vet ikke at vi kan $\overset{b}{\underset{a}{A}}$ antideriver enda!

EX: oppg 5.4.2

Simplify $\int_0^2 3f(x)dx + \int_0^1 3f(x)dx - \int_0^3 2f(x)dx - \int_0^2 3f(x)$

(Utregning)

"Arealet fra x til"

Ex: Piecewise   oppg 5.4.54

Finn $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$, hvor $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x < 0 \\ 2 & , x \geq 0 \end{cases}$

Regn ut

For Not M 1 kap 5.5 del 1

Kap 5.5

Mål

- Skjønne hvorfor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- Kunne derivere integraler

Fundamentalteoremet

$$\frac{d}{ds} \int_a^s f(x)\,dx = f(s)$$

a konstant

Det vil si:

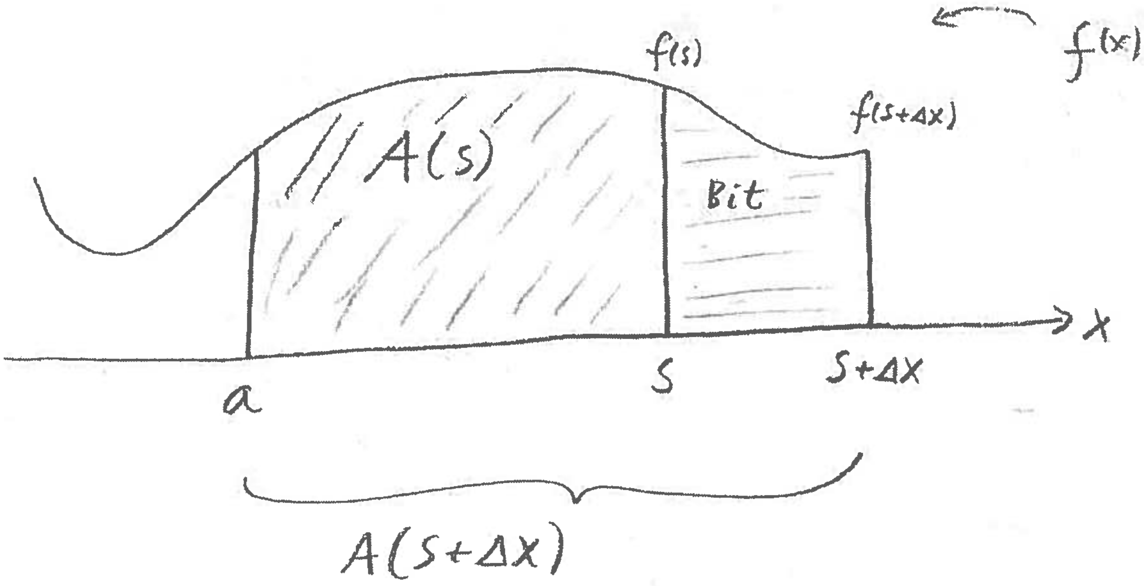
$$F' = f \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

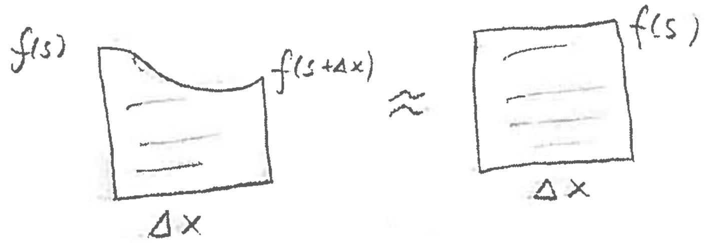
Bevis

Intuitiv versjon:

(neste side)



$$\text{Bit} = A(s+\Delta x) - A(s) \approx f(s) \cdot \Delta x$$



Når $\Delta x \to 0$ $\quad \Delta x = dx \quad$ blir det nøyaktig

$$A(s+dx) - A(s) = f(s) \cdot ds$$

$$\frac{A(s+dx) - A(s)}{dx} = f(s)$$

$$\frac{dA}{ds} = A'(s) = f(s)$$

Stigningstallet til Arealet er funksjonsverdien

For Not M 1 kap 5.5 del 2

Logisk bevis

$$A'(s) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(s+\Delta x) - A(s)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

Det finnes en $s \leq c \leq s+\Delta x$ (M.V.T. el.l.)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$$= f(c) \quad \text{med} \quad s \leq c \leq s+0$$

$$= f(s)$$

For mer detaljer, se boka p312.

Konklusjon

La F være antiderivert av f

$F' = f$, $\frac{dF}{ds} = f(s)$, $(F = A)$

da er $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Men, hva med $F(s) + C$?

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(b)+C) - (F(a)+C)$$

$$= F(b) - F(a) \boxed{+ C - C}$$

Vi skriver $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) \Big]_a^b$

EX: Endelig integrasjon!

Vi vet at $\frac{d}{dx} xe^x + \sin x = e^x + xe^x + \cos x$

Finn $\int_0^{\pi} e^x + xe^x + \cos x \, dx$

(Utregning)

For Not M1 Kap 5.5 del 3

<u>Notasjon:</u> Differensialer

$$y(x) - y_0 = \Delta y = \int_0^x dy = \int_0^x \frac{dy}{ds}\,ds$$

$$y'(x) - 0 = \frac{d}{dx}\int_0^x y'(s)\,ds$$

<u>Derivere integraler</u>

<u>EX:</u>

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{3}{s} + s\,ds = \frac{d}{dx}\Big[F(s)\Big]_x^{x^2} \quad \begin{pmatrix} \text{for} & s > 0 \\ \text{dvs} & x > 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(F(s) = 3\ln s\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(F(x^2) - F(x)\right)$$

$$= F'(x^2)\cdot 2x - F'(x)$$

$$= \frac{dF}{ds}\Big|_{x^2}\cdot 2x - \frac{dF}{ds}\Big|_x$$

$$= \frac{3}{s} + s\Big|_{x^2}\cdot 2x - \frac{3}{s} + s\Big|_x$$

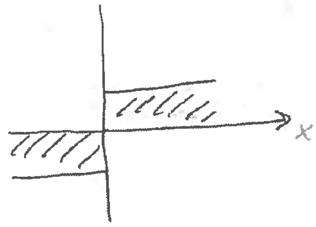
$$= \frac{3}{x^2}\cdot 2x + x^2\cdot 2x - \left(\frac{3}{x} + x\right)$$

$$= \frac{1}{x}(6 - 3) + 2x^3 - x$$

$$= \frac{3}{x} + 2x^3 - x$$

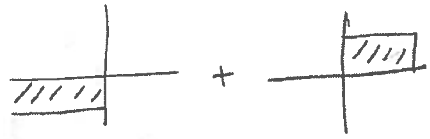
Ting som går galt

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{1} f(x) = ?$$

kan fikses



$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b 0 \, dx = 0 \neq f(x)$$

kan <u>ikke</u> fikses!

For at man skal kunne på $f(x)$ integrere så derivere må $f(x)$ være $\underbrace{\text{stykkevis kontinuerlig}}_{\text{integrerbar}}$ på intervallet

- Den deriverte av $\int f(x)$ trenger ikke å eksistere i alle punkt.

$$\operatorname{sign}(x) \xrightarrow{\text{int}} |x| \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \operatorname{sign}(x)$$

ForNot M1 kap 5.H

Kap 5. H Anvendelser

• ikke på øving
• eksamensrelevant
(i flere fag)

Mål:

- Knytte det vi lærte i kap5.5 Integrasjon = Antiderivasjon til anvendelser / andre fag
- Forstå hvorfor $\int_0^s a(t) = v(s)$ $(-v_0)$

og $W = \int i v \, dt$

$v = v(t)$
$i = i(t)$
W work

$(v(0)=0)$

Hvorfor $v(s) = \int_0^s a(t)dt$

Svar 1: $v'(s) = a(s)$

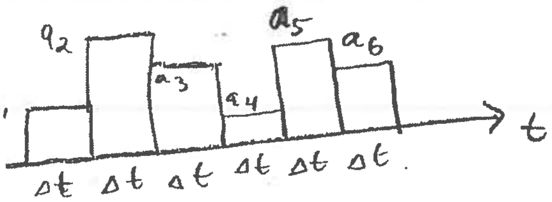
Svar 2:

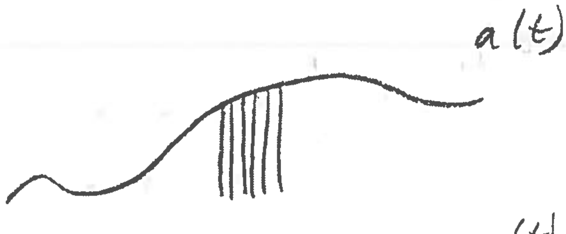
$V = a \cdot \Delta t$ med konstant a

$[m/s] = [m/s^2] \cdot [s]$

$V = a_1 \cdot \Delta t_1 + a_2 \cdot \Delta t_2$ · med 2 forskjellige akselerasjoner

$V = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot \Delta t$ · med N forskjellige akselerasjoner, alle med tid Δt





$V = \sum a(t) dt$

$V(s) = \int_0^s a(t) \, dt$

$(v(0)=0)$

Electric power

- Wikipedia

$$P = \frac{W}{1\text{sek}} = \frac{QV}{t} = IV$$

W	arbeid	J
P	effekt	Watt
I	strøm	ampere
V	spenning	volt
Q	ladning	coulomb

- Oversatt til kontinuerlig tid

Et lite tidsinterval $\underline{dt}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ \cdot V}{dt} = i \cdot V$$

$i(t)$ per def $\frac{dQ}{dt}$

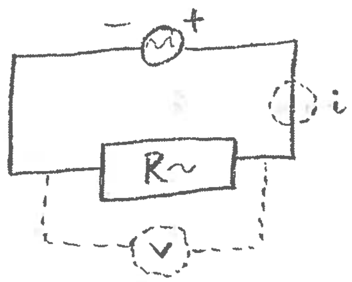
$i = i(t) = I$

$v = v(t)$

dW litt arbeid

dt litt tid

- Mye arbeid, i løpet av 1 time, med varierende $i(t)$ og $v(t)$



$$W = \sum dW = \int_0^{1\text{time}} dW = \int_0^{1\text{time}} i(t) \cdot v(t) \cdot dt$$

Kretsteknikk (se link)

Video: 16.20-17.33
18.25-19.30
24.20-28.00

$$v_L = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} i_L$$

For Notat M1 kap 5.6 del 1

Kap 5.6 The method of substitution

Mål

- Kjerneregel $\leftrightarrow$ Substitusjon
- Integrere ved substitusjon
- Alltid skrive navn på grensene

$$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

EX:

$$I = \int_0^4 e^{(x^2)} \cdot x\,dx \quad , \text{ finn } I$$

løsning

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = u' = 2x$$

$$du = 2x\,dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=4} e^{u} \cdot x\,dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=4} e^{u} \cdot \frac{1}{2}\,du$$

$$I = \int_{u=0}^{u=16} \frac{1}{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[e^{u}\Big]_{u=0}^{16}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{16} - e^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{16} - 1\right)$$

Substitusjon

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

$$f(u) = e^{u} \qquad \frac{df}{du} = e^{u}$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{df}{dx} = e^{(x^2)} \cdot 2x$$

$$\frac{df}{du}\,\frac{du}{dx} = e^{u} \cdot 2x$$

$$f(x) = \int df = \int \frac{df}{dx}\,dx = \int \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}\,dx$$

$$\int_{x=a}^{b} g(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} g(u)\,dx = \int_{x=a}^{b} g(u)\,\frac{dx}{du}\,du$$

$$= \int_{u=u(a)}^{u(b)} g(u)\; x'(u)\,du$$

$$\boxed{\begin{matrix} u(x) \\ x(u) \end{matrix}}$$

EX:

Sammen gjør vi 5.6.11 & 5.6.18 !

Kladd

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx \qquad u = e^x - 1 \qquad x = \ln(u-1)$$

$$\frac{du}{dx} = e^x = u+1$$

$$dx = \frac{du}{u+1}$$

(p 340)

$$\int \frac{u+2}{u}\,dx = \int 1 + \frac{2}{u}\,dx$$

$$= x + 2\int \frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2 + -\frac{1}{4}} = x + 2\cdot \ln \frac{|u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|}{|u+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|}$$

$$= x + 2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| = 2\ln|e^x-1| - x$$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx \qquad u = e^x \qquad \frac{du}{dx} = e^x \qquad dx = \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{1}{u+\frac{1}{u}}\,\frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \tan^{-1}(u) = \tan^{-1}(e^x)$$

$(+C \quad du)$

$(x = 0$ ikke greit! [illegible]$)$

FOR Notat M1 kap 5.7 del 1

Kap 5.7 Area of plane regions

Mål:

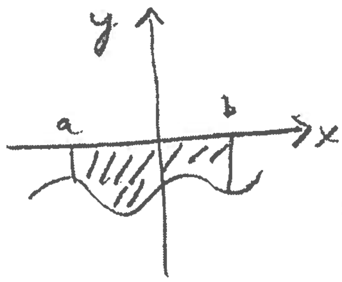
- Integrere mer generelle områder

Før

$\int_a^b f(x)$

Per definisjon:

$\left[\int -\sin x - 2 = -\int \sin x + 2\right]$

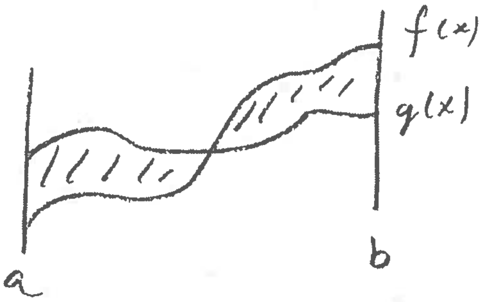


Negativt areal!

$\int_a^b f(x)dx < 0$

Nå 1:

Areal av området

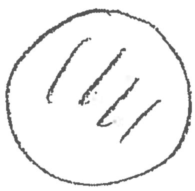


$\int f(x) - g(x)$ når $f > g$

$\int g(x) - f(x)$ når $g > f$

Areal: $\int |f(x) - g(x)|\, dx$ [må deles opp]

Nå 2:



$x^2 + y^2 = 1$

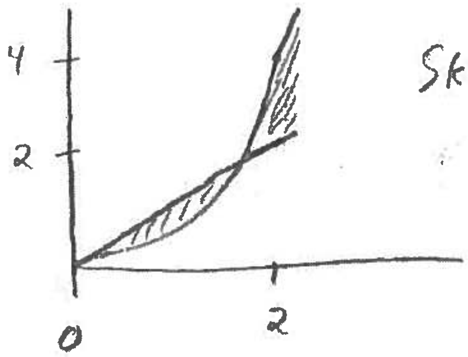
$y^4 + x^2 =$ noe

Implisitte "funksjoner"

EX: Arealet mellom grafer

Regn ut arealet mellom x og x^2 fra $x=0$ til $x=2$

løsning



Skisse!

Tegn!

Krysningspunkt c:

$c = c^2$

$0 = c^2 - c$

$0 = c(c-1)$

$c=0$ eller $c=1$

$$A = \int_0^1 |x - x^2|\,dx + \int_1^2 |x-x^2|\,dx$$

$$A = \int_0^1 x - x^2\,dx + \int_1^2 x^2 - x\,dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(16 - 12 - 2 + 3)$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{6}}_{>0} + \underbrace{\frac{5}{6}}_{>0} = 1$$

ForNot M1 kap 5.7 del 2

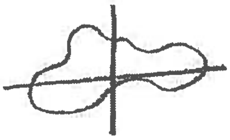
EX: Oppg 5.7.27

Finn det totale arealet omsluttet av

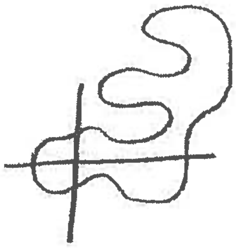
$$y^2 = x^2 - x^4$$

Løsning

Skisser



4 biter

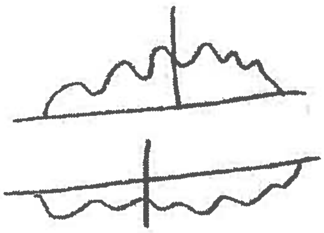


Mange biter!

Tegn

$y_1 = \sqrt{x^2 - x^4}$

$y_2 = -\sqrt{x^2 - x^4}$



Vi ser at $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -0 = 0$,

$y_1(1) = 0$, $y_2(1) = -0 = 0$

$x > 1$ ikke går ann

$x < 0$ er symmetrisk med $x > 0$

$$A = \int_{x=-1}^{1} y_1 \, dx + \int_{x=-1}^{1} 0 - y_2 \, dx$$

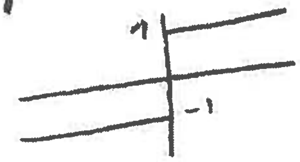
$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^4} + \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^4} = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^4}$$

$$A = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

ved W.Alpha eller Maple el.l.

Appendix 1

Oppgave 1

$f(x) =$  $= \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$

hva er $\int_0^5 f(x)\,dx$?

a) $\sin(x)$

b) x

c) $|x|$

d) x^2

Oppgave 2

Kan vi integrere $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$?

Hva med $\int_2^7 \frac{1}{x^2}\,dx$?

i) Ja

ii) Nei

Kan vi løse dette problemet?

a) Nei

b) Ja, med oppdeling i stykkevise funksjoner

c) Ja, med grenseverdier

Oppg 3

$s(t)$ er strekningen tilbakelagt
$v(t)$ er hastigheten
$a(t)$ er akselerasjonen

Hvilke er rett?

a) $s'(t) = a(t) = \int v(t)$

b) $s'(t) = v(t) = \int a(t)$

c) $s'(t) = v'(t) = a(t)$

d) $s''(t) = v'(t) = a(t)$

e) $s(t) = \int v(t) = \iint a(t)$

Appendix 2

Odd / Even

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$$

EX:

Forenkle $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin(x) + x^4 + x^2\tan(x)\,dx$

Appendix 3

Diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx & & \\
\overset{b}{\underset{a}{A}} f(x)\,dx \arrow[ur, "f \text{ Kont. på } {[a,b]}", "\text{Fund Thm}"'] & & \overset{b}{\underset{a}{I}} f(x)\,dx \arrow[ul, "\text{Per Def.}"'] & \\
 & \overset{b}{\underset{a}{N}} f(x) \arrow[ur, "\text{Nøye}"] & & {\begin{array}{l} L\left(f, \underset{h}{a\,||||\,b}\right) \\ R(f, P, c) \end{array}} \arrow[ul, "h \to 0"']
\end{tikzcd}
$$