Forelesningsnotater kap 4.7 del 1

Kap 4.9 Linear Approximations

Mål

- Forstå linearisering
- Forberedelse på Taylorpolynomer

Linearisering - Derivasjon

brukt for

$y = f(x)$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=a} = \frac{L(x) - L(a)}{x - a} \approx \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) \qquad L(a) = f(a)$$

$$\frac{L(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$L(x) = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

Linearisering - matching

Gitt $f(x) = e^x$ finn polynom av grad 1 som "likner mest" på $f(x)$ rundt $x = 0$.

løsn

$p(x) = c_1 + c_2 \cdot x$

$p(0) = f(0) \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = e^0 \Rightarrow c_1 = 1$

$p'(0) = f'(0) \Rightarrow c_2 \cdot 1 = \left. e^x \right|_{x=0} \Rightarrow c_2 = 1$

Så $p(x) = 1 + x$

W. Alpha. Tegn

Teorem om feilen 4.9. Thm 11

$f(x)$ kan deriveres 2 ganger

$L(x) \approx f(x)$ er lineariseringen fra forrige eksempel, rundt $x=a$.

$E(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - L(x)$ kalles "feilen"

Da finnes $s \in (x,a)$ eller (a,x) slik at

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$$

Betydning

$$|E(x)| \leq \frac{|x-a|^2}{2} \cdot M \quad \text{hvor} \quad M = \max_s f''(s)$$

Ref. forrige eksempel

$f(x) = e^x$, $p(x) = L(x) = 1 + x$, $a = 0$

Se på feilen i $x = 1$:

$$E(1) = \frac{f''(s)}{2}(1-0)^2 = \frac{e^s}{2}$$

for $s \in (0,1)$ i en eller annen følge teoremet

Sjekk

$f(1) - L(1) = e^1 - 2 = 0.71828...$

For $s = 0.36225...$ så er $\frac{e^s}{2} = 0.71828...$

ForNot Matte 1 kap 4.9 del 2

EX: Oppgave 4.9.28 write!

If $f(2)=4$, $f'(2)=-1$, $\frac{1}{2}\frac{1}{x} \le f''(x) \le \frac{1}{x}$ for $x>0$

find the best approximation for

~~contains~~ $f(3)$, with error estimate

$L(x) = p_1(x) = c_0 + c_1 x'$ rundt $a=2$

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= p_1(2) \\ 4 &= c_0 + c_1 \cdot 2 \\ f'(2) &= p_1'(2) \\ -1 &= c_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_0 &= 4 - 2c_1 = 4+2 \\ c_0 &= 6 \end{aligned}$$

$p_1(x) = 6 - x$

$E(x) = f(x) - L(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-2)^2$, $s \in (2,x)$

$f(3) \approx p_1(3) = 6-3 = 3$

$$|E(3)| \le \frac{\left|\max_{s\in(2,3)} f''(s)\right|}{2}(3-2)^2$$

$$|E(3)| \le \frac{1}{2}\left|\max_{s\in(2,3)} \frac{1}{s}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

Kap. 4.10 Taylor Polynomials

Mål

(Hvorfor?)

- Utvide linearisering til høyere grads polynomer
- Bruke Taylor-polynomer til å forstå/løse grenseverdier
- Få innsikt i andre bruksområder

Antakelse

- Vi er interessert i $x=0$ dvs $a=0$

ex

- Finn linearisering av $f(x)=\sin(x)$ ved $a=3$
- Finn linearisering av $g(x)=\sin(x+3)$ ved $\underline{a=0}$ $(a+3=3)$

<u>Taylorpolynom</u>

Definisjon: Taylorpolynomet av grad n om $x=0$ til $f(x)$ er polynomet av grad n, $p_n(x)$, med verdien, $p_n(0)$, og alle de n deriverte lik funksjonen sin verdi og deriverte i 0.

"a = 0"

<u>Med symboler:</u>

Taylor $p_n(x)$ til $f(x)$ om $a=0$

$$f(0) = p_n(0)$$
$$f'(0) = p_n'(0)$$
$$f''(0) = p_n''(0)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

<u>Utregning</u>

La $p_n(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots + c_n x^n$

Da
$$p_n(0) = c_0 \qquad = f(0)$$
$$p_n'(0) = 1 \cdot c_1 \qquad = f'(0)$$
$$p_n''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2 \qquad = f''(0)$$
$$p_n'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c_3 \qquad = f'''(0)$$

For Notat M1 kap 4.10 del 2

EX: e^x

$f(x) = e^x$ finn $p_2(x)$ ved $x = 0$

$p_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$

(Utregning)

Fra før $L(x) = p_1(x) = 1 + x$

Tegn opp

Vis animasjon av $\frac{d}{dx}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$.

EX (Oppg ca 4.10.10 ++)

Bruk tredjegrads Taylor rundt $x=0$ til å finne $\sqrt{61}$

løsning

$f(x) = \sqrt{x+64}$ $\qquad$ $f(0) = \sqrt{64} = 8$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x+64)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x+64)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = +\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(x+64)^{-\frac{5}{2}}$

$P_3(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$

$p'(0) = C_1 \qquad p''(0) = 2C_2 \qquad p'''(0) = 3\cdot 2\cdot C_3$

$C_0 = f(0) = 8$

$C_1 = f'(0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{16}$

$C_2 = \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{64}^3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8^3} = -8^{-4}$

$C_3 = \frac{1}{6} f'''(0) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{64}^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 8^{-5} = \frac{1}{2}\cdot 8^{-6}$

$P_3(x) = 8 + \frac{1}{16}x - 8^{-4}x^2 + \frac{1}{2}\cdot 8^{-6}x^3$

$\boxed{\text{W.A. Plots} \quad \text{Oppg } P_2(x)}$

$\sqrt{61} \approx P_3(-3) = 8 + \frac{-3}{16} - \frac{9}{8^4} + \frac{-27}{2\cdot 8^6}$

$= 7.81025123596$ $\qquad \boxed{7.81024968\ldots}$

For Notat M1 Kap 4.10 del 3

Generelle Taylorpolynom med generell $x=a$

$f(x)$ uspesifisert (smooth) funksjon

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Generell a : flytt $x \to x-a$, $0 \to a$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor's feilformel (Thm 12)

$f(x) \approx p_n(x)$ ved $x = a$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ for en $s \in (x, a)$

$s \in (a, x)$

Ex:

$f(x) = e^x$ $\quad a = 0$

$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

$$E_3(x) = \frac{f^4(s)}{4!} x^4 \qquad f^4(s) = e^s$$

Se på intervallet $[0,1]$ og finn en øvre skranke for feilen.

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \left|\max_{s\in[0,1]} f^4(s)\right| \cdot \left|\max_{x\in[0,1]} x^4\right|$$

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{24} \left|\max_{s\in[0,1]} e^s\right| \cdot 1^4$$

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot e^1 < \frac{1}{24} \cdot 3 = \frac{1}{8} = 1{,}25$$

Konklusjon

$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ på $[0,1]$

med error/feil mindre enn $1{,}25$.

$\boxed{4.11: \text{Skip}}$

For Notat M1 Kap 5.1 del 1

Kapittel 5 Integrasjon

Introoppgave

Finn $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

Antiderivasjon

Finn ut hvilken funksjon vi deriverte

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

$\longleftarrow$

Integrasjon

Klipp ut arealet under grafen og vei på vekt. Bruk homogent papir!

Kap 5.1

Mål:

- Lære Σ-notasjon for summer

Hvorfor?

- Resten av kapittelet

ex

$$1+2+3+4+5 = \sum_{i=1}^{5} i = \sum_{k=1}^{5} k$$

$$1+4+9+16 = \sum_{i=1}^{4} i^2$$

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

For Notat M1 kap 5.1 del 2

Summer formler

Observer $\sum ? = n^2$

$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$

$$\sum_{n=1}^{M} 2n-1 = M^2 \qquad (1)$$

Sjekk (1)

$M = 0$: V.S. =

H.S. =

$M = 1$: V.S. =

H.S. =

$M = 2$: V.S. =

$$\sum_{n=1}^{M} 2n-1 = \sum_{n=1}^{M} 2n - \sum_{n=1}^{M} 1 = 2\underbrace{\sum_{n=1}^{M} n}_{\overset{def}{=}\alpha} - \sum_{n=1}^{M} 1 = 2\cdot\alpha - M$$

$2\cdot\alpha - M = M^2$

$$\alpha = \frac{M^2 + M}{2} = \frac{M(M+1)}{2}$$

$\boxed{\text{se side 292 Thm 1}}$

For Notat M 1 kap 5.2 del 1

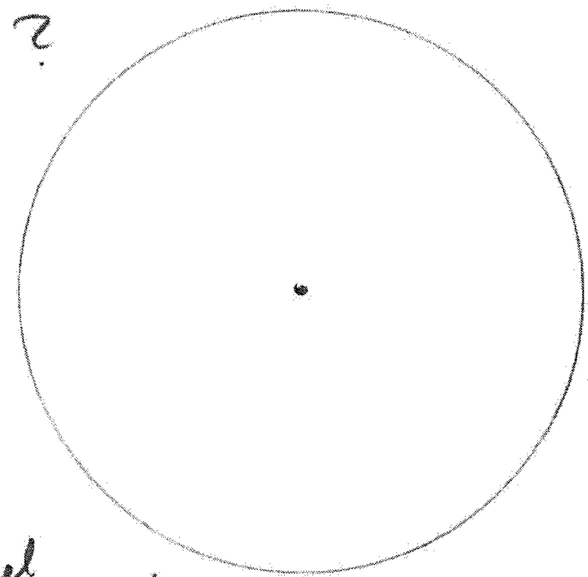
Kap 5.2

Mål:

- Forstå hvordan areal kan beregnes ved å "tegne firkanter" i stedet for å klippe-ut-og-veie
- Kunne regne ut enkle arealer på denne måten

EX: Hva er π?

Før:



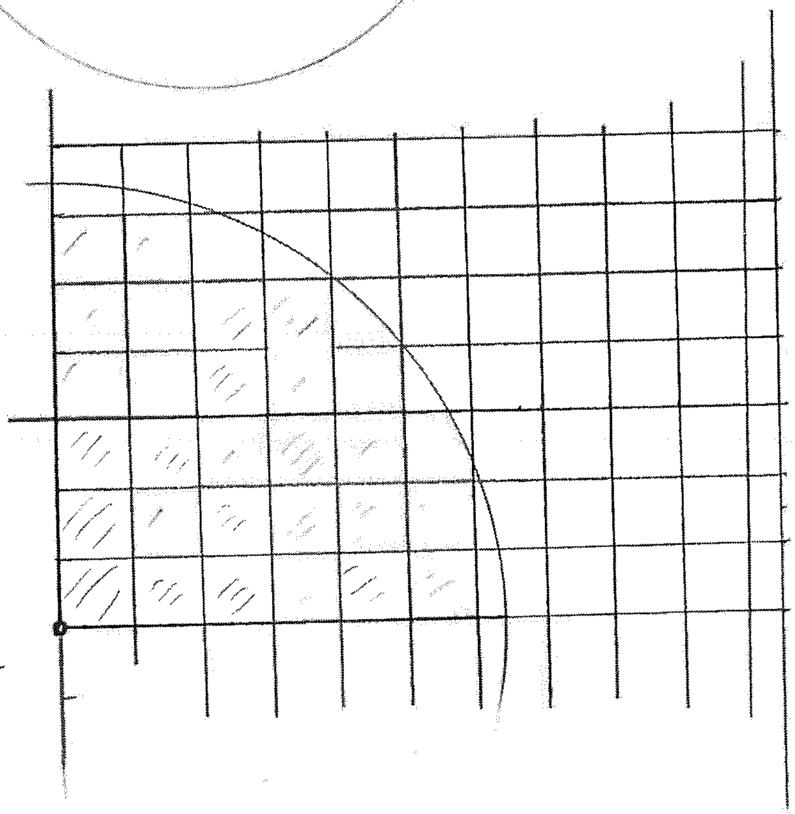
$r = 4\,cm$

$A = \pi \cdot 4^2\, cm^2$

Sammenlikn vekt med kvadrat med sider 4 cm

$\pi = \frac{\text{Vekt Sirkel}}{\text{Vekt Areal}}$

Nå



$A = \frac{\pi}{4} \cdot 6{,}4^2 = 10.24\pi$

28 Indre $\Rightarrow \pi > 2{,}8$

37 Ytre $\Rightarrow \pi < 3{,}7$

Gjennomsnitt $\pi \approx 3{,}25$

left almost blank

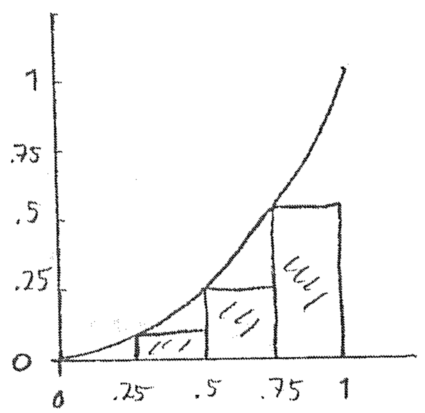
For Notat   Kap 5.2 del 2

Arealet under grafen til en matematisk funksjon

$\boxed{\text{* Kommer til å bli } \int_a^b f(x)\,dx \text{ senere}}$

På den tungvindte måten, som er den eneste metoden vi har nå, finn

$L(f, 0 \underset{h}{|||||} 1)$ for $f(x) = x^2$



▨ er $0 \underset{h}{||||||} 1$ med $h = 0.25$

$\boxed{0 \underset{h}{||||||} 1}$ betyr "del opp tallinjen fra 0 til 1 i biter med tykkelse h"

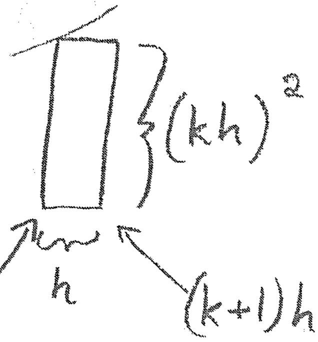
Dette er eksempel på en partisjon P.

$$0 < h < 2h < 3h < \ldots < (N-1)h < Nh = 1$$

Det blir N biter   ex: over er det $N = 4$

EX: "Integrer x^2 fra 0 til 1 med Lower Riemann Sum"

$$L(x^2, 0 \underset{h}{|||} 1) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{areal av}$$



$$= \sum_{k=0}^{N-1} (kh)^2 \cdot h$$

$$= h^3 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = h^3 \frac{(N-1)\cdot N \cdot (2N-1)}{6}$$

side 292

$Nh = 1$

$$L(x^2, 0 \underset{h}{|||} 1) = \frac{hN-h}{6} \cdot Nh \cdot (2Nh - h)$$

$$L(x^2, 0 \underset{h}{|||} 1) = \frac{1-h}{6} \cdot 1 \cdot (2-h) = \frac{1}{6}(2-3h+h^2)$$

Boka: $\|P\| \to 0$

<u>Vendelig nøye $h \to 0$</u>

$$\int_0^1 x^2\,dx \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{h\to 0} L(x^2, 0 \underset{h}{|||} 1) = \frac{1}{6}\cdot(2-0+0)$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Fra fór: $\displaystyle \overset{1}{\underset{0}{A_D}}\, x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

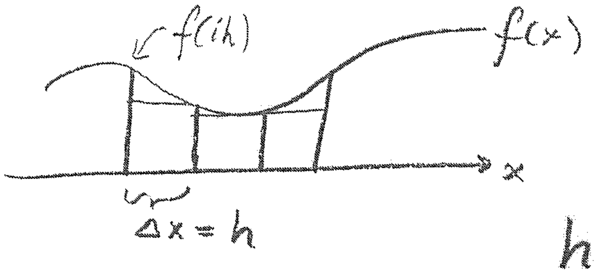
Senere i kap 5: $\displaystyle \int_0^1 x^2 dx = \overset{1}{\underset{0}{A_D}}\, x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx$

Forelesningsnotat kap 5.2 del 3

EX: Oppg 5.2.18 (Skriv)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2}$$

Hvilket integral gir S_n?



$a=0,\ b=1$ $\qquad \int_0^1 ?\,dx$

$h \cdot n = 1$

~~$S_n =$~~

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2h + 3i\,h^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\cdot h + 3\cdot(ih)\cdot h \qquad = \sum f(x_i)\Delta x = \sum f(ih)\,h$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(ih)\cdot h$$

med $f(ih) = 2 + 3\cdot(ih)$

$f(x) = 2 + 3x$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 2+3x\,dx \overset{\text{Juks}}{=\!=} \left[2x + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = 2 + \frac{3}{2}$$

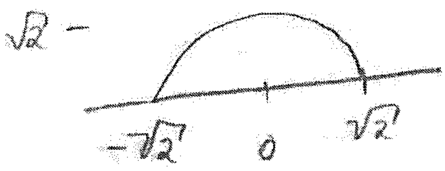
$$\underline{= 3 + \frac{1}{2}}$$

EX: Oppg 5.4.7

Finn $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt$ uten å bruke antiderivasjon.

løsn

PRØV (kort tid)



$y = \sqrt{2-t^2}$ $\quad y \geq 0$

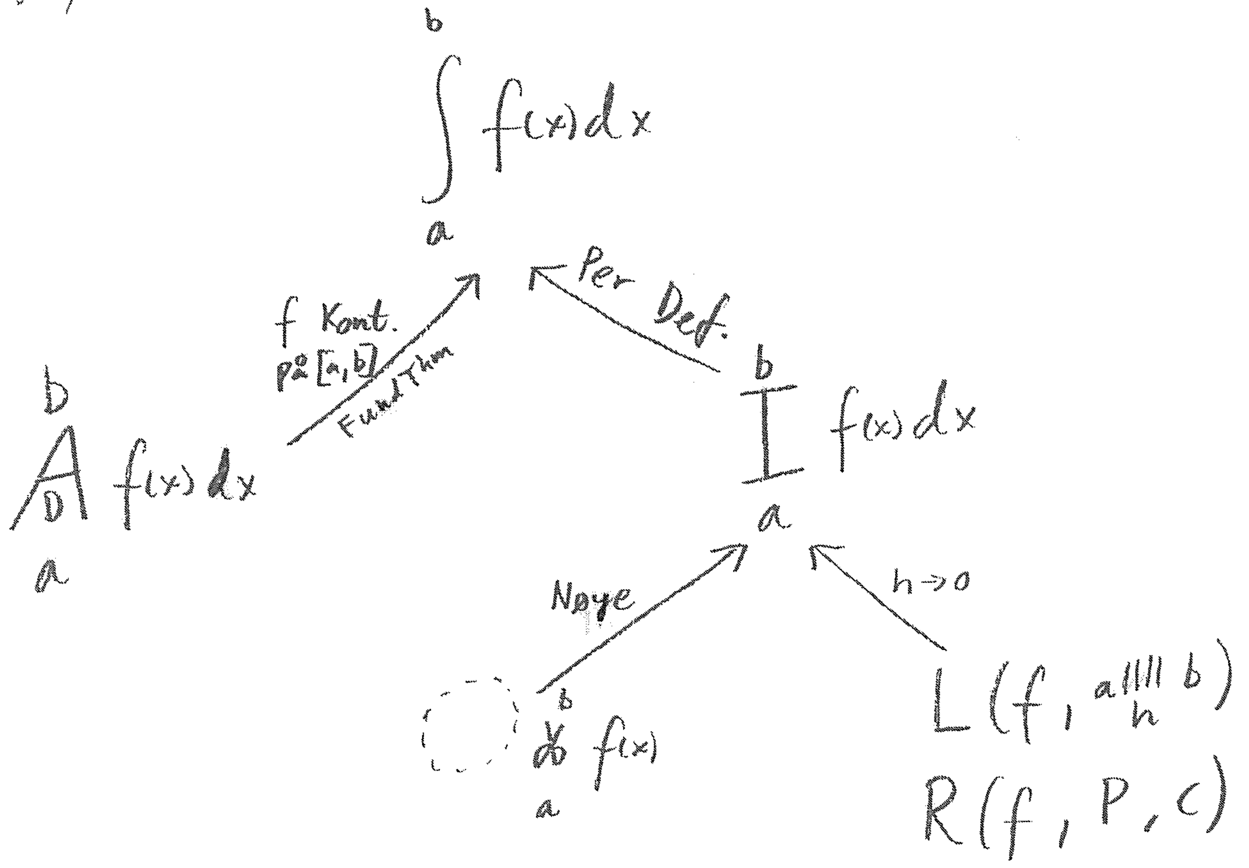
$y^2 = 2 - t^2$

$y^2 + t^2 = 2 = \sqrt{2}^2$

$$\text{Areal} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}^2}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Appendix 1

Diagram



Appendix 2

Question to the audience.

1) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

Skriv som sum. Flere kan være riktige.

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{n!}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$

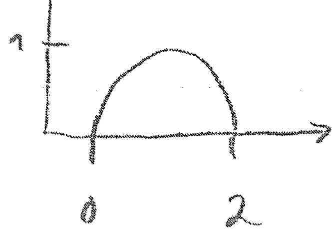
d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$

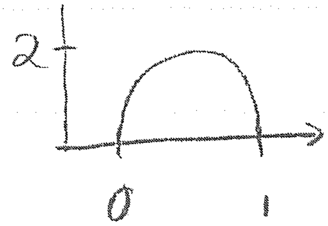
e) $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{s!}$

f) $1 + x + x^2/2 + \sum_{a=3}^{n} \frac{x^a}{a!}$

2) Hva er størst av

$$\underbrace{\int_0^2 f(x)\,dx}_{\mu} \quad \text{og} \quad \underbrace{2 \cdot \int_0^1 f(2x)\,dx}_{\Omega}$$





a) $\mu < \Omega$

b) $\mu = \Omega$

c) $\mu > \Omega$

3) Bruk taylor-polynom til å beregne

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{(x^2)}}{x^2}$$

Så langt vi kommer.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots\right)}{x^2}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(\frac{-1}{6} - 1\right) + x^4\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2}\right) \pm \dots}{x^2}$$

$$L = \lim_{x \to 0} 1 \cdot \left(\frac{-7}{6}\right) + x^2 \cdot (\text{Noe}) \pm \dots$$

$$L = -\frac{7}{6}$$