Følger og rekker

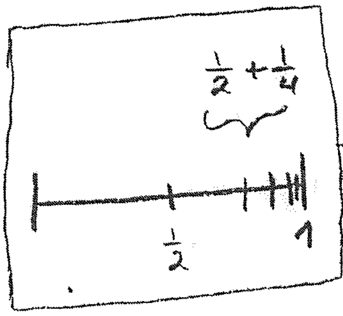
- Kap. 9
- Sequences, Series

Se pensumoversikt

Introduksjon

Hva betyr / Hvorfor er

- $0,9999\ldots = 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$



Konvergens

En rekke konvergerer når følgen av delsummer konvergerer.

$\Leftrightarrow$ A series converges when the sequence of partial sums converges.

$\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$ when $\lim_{n\to\infty} S_n = L$

where $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Boka kap 9.1 burde skrevet S_n

Følger & Konvergens
-Kap 9.1

3 Måter å angi følger på

(i) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
mønsteret må være tydelig!

(ii) $s_n = n^2$ funksjon av n

(iii) $s_n = \dfrac{s_{n-1} + s_{n-2}}{2} + 3n - \dfrac{5}{2}$

funksjon av foregående ledd (og n).
Må vite $s_0 = 0$, $s_1 = 1$.

Quiz

Hvilken av disse er ikke en følge (sequence)

a) $S_n = n$ b) $S_n = \frac{n-1}{n\pi}$ c) $S_n = n^n$

d) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$
$S_0 = 0,\ S_1 = 1$

e) $S_n = \frac{S_1 + S_n}{2}$
$S_1 = 1$

f) $S_n = 1+2+3+\ldots+n$

g) Alle er følger.

Mens vi tenker: Huskeregel til dere!

Følger er før Rekker i alfabetet og i boka!

Sequences er før Series (q er før r) i alfabetet og i boka!

Definisjon 1 (p497)

a) Følgen $\{S_n\}$ er bounded below av L og L er et lower bound for $\{S_n\}$ hvis $S_n \geq L$ (for alle n)

$\{S_n\}$ er bounded above av M, og M er et upper bound for $\{S_n\}$ hvis $S_n \leq M$ (for alle n)

b) $\{S_n\}$ er positiv hvis $S_n \geq 0$ (for alle n)

$\{S_n\}$ er negativ hvis $S_n \leq 0$ (for alle n)

c) $\{S_n\}$ er stigende / increasing hvis

$S_{n+1} \geq S_n$ (for alle n).

$\{S_n\}$ er synkende/decreasing hvis $S_{n+1} \leq S_n$ (for alle n).

stigende eller synkende → monoton

d) $\{S_n\}$ er alternerende hvis

$S_n < 0 \Rightarrow S_{n+1} > 0$, og

S_n aldri lik 0, og $S_n > 0 \Rightarrow S_{n+1} < 0$.

Eksempel 9.1.EX3

Vis at følgen

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} \quad \text{er synkende}$$

Løsning

Grenseverdi av Følge

EX:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{1/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2+n = \infty$$

Uformell def

$\lim_{n\to\infty} S_n = L$ hvis

For alle nøyaktigheter ε
Finnes det et tidspunkt N_ε
Slik at du alltid etter dette
er innenfor den krevde nøyaktighet
avstand til L.

Formell

Uansett $\varepsilon > 0$ finnes N_ε med

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

Utregning

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)$$

EX

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

EX

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

"divergerer til ∞"

EX

$$\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$$

EX

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 1 & n \text{ partall} \\ -1 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

divergerer

Funfact

$(-1)^n \xrightarrow{n\to\infty}$ har to akkumulasjons-punkter $+1, -1$

$\lim_{n\to\infty} (-2)^n \to 0, -2, +4, -8, +16, \ldots$ har to akkumulasjonspunkter $+\infty$ og $-\infty$

Eksempel 9.1.EX 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3} = ?$$

Hvis $L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-1}{5x^2+x-3}$

så vil

$$\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3} \xrightarrow{n\to\infty} L$$

Løsning

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-1}{5x^2+x-3} =$$

Følger: Avsluttende Kommentarer

Thm1

$\{S_n\}$ converges $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ bounded

Thm2

$\{S_n\}$ ultimately increasing $\Rightarrow$
converges or diverges to ∞

Thm3

$|x| < 1 \Rightarrow x^n \to 0$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} = 0$

EX: Bruk av Thm

$S_1 = 1 \qquad S_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$

Finn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Løsning

Rekker

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \text{dersom}$$

$$\sum_{n=1}^{M} a_n = S_M \xrightarrow{M\to\infty} L$$

Kjente rekker

- Den konstante

$$1+1+1+\dots = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -4 = -\infty$$

- Den geometriske $|r|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Note:
"Første ledd"
$r=1$: Konst.
Bevis

- Den harmoniske

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(selv om $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

Bevis ved -integrasjon, eller
-oppsamling

Konvergens av Rekker

- Vanskeligere enn følger
- Mange nye metoder
- Kreativitet + Intuisjon
- Lære ved eksempler
- Les Teoremer selv ved behov

EX R1

$$3 + \frac{-3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{-3}{8} + \frac{3}{16} \dots$$

Løsn

EX R2

Finn $\sum \frac{3}{2n}$

Løsn

Boka p509

EX R3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$$

(se tavla)
Konvergerer?

EX R4

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

(Konverg.?)

EX R5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$$

(Finn summen)

EX R6

Vis at $\sum n^{-p} = \sum \frac{1}{n^p}$

$p > 1$: konvergerer
$p < 1$: divergerer

EX R7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$$

Konv?

EX R8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$$

Konv?

EX R9

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$ Konv?

EX R10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$ Konv?

EX R11

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , a_n = \frac{n+5}{n^3-2n+3}$$

EX R12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$$

Ratio-testen: Ser rekken ut som en geometrisk rekke? $\boxed{\text{Viktig!}}$

EX R13

$$\sum \frac{99^n}{n!}$$

EX R14

$$\sum \frac{n^5}{2^n}$$

EX R15

$$\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Absolutt og Betinget Konvergens

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer **absolutt** dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ikke konv. men $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv kalles det **betinget konvergens**

Teorem

$\sum |a_n|$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ konv

Bevis

$$\sum 0 \leq \underbrace{\sum a_n + |a_n|}_{\text{konv.}} \leq \sum 2|a_n|$$

$\Rightarrow$

$$\sum a_n = \sum a_n + |a_n| - \sum |a_n| \quad \text{konv.}$$

Forsiktig!

$$\sum 0 \neq \sum 1 - \sum 1$$

Eksempel: Harmoni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots$$

Konvergerer <u>ikke absolutt</u>

<u>Vanlig konvergens</u> fordi

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n^2+n} \quad \text{gir} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{30} - \dots$$ konvergerer.

Hvorfor Bry Seg?

Vi kan kun bytte rekkefølge i summen dersom konvergensen er absolutt!

$$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \quad > 0$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} \quad > 0$$

$$-\frac{1}{5} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{100} \quad > 0$$

$$-\frac{1}{7} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{1000} \quad > 0$$

sum $\gg 0$!

ooo

Test for vanlig konvergens på alternerende rekker:

Etter en N så

- leddene blir mindre $|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad n \geq N$
- leddene går mot 0 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

EX:

Finn abs. og bet. konv. for

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$$

Løsn