

Følger og rekker

- Kap. 9
- Sequences, Series

Forelesningsnotat
Kap 9 Del 1 s 1

Se pensum-
oversikt

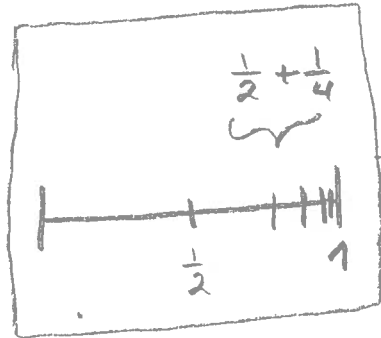
Introduksjon

Hva betyr / Hvorfor er

$$- 0,9999\dots = 1$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

$$- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$



Konvergens

En rekke konvergerer når
følgen av delsummer konvergerer.

\Leftrightarrow A series converges when the
sequence of partial sums converges.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L \text{ when } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

where $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Boka kap
9.1 burde
skrevet S_n

Følger & Konvergens

s2

-Kap 9.1

3 Måter å angi følger på

(i) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

mønsteret må være tydelig!

(ii) $S_n = n^2$ funksjon av n

(iii) $S_n = \frac{S_{n-1} + S_{n-2}}{2} + 3n - \frac{5}{2}$

funksjon av foregående ledd (og n).

Må vite $s_0 = 0, s_1 = 1$.

konvergens

En re

Quiz

Hvilken av disse er ikke en følge (sequence)

a) $S_n = n$ b) $S_n = \frac{n-1}{n\pi}$ c) $S_n = n^n$

d) $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$
 $S_0 = 0, S_1 = 1$ e) $S_n = \frac{S_1 + S_n}{2}$
 $S_1 = 1$

f) $S_n = 1+2+3+\dots+n$

g) Alle er følger.

Mens vi tenker: Huskeregel til dere!

Følger er før Rekker i alfabetet og i boka!

Sequences er før Series (q er før r) i alfabetet og i boka!

Definisjon 1 (p497)

a) Følgen $\{S_n\}$ er bounded below av L
og L er et lower bound for
 $\{S_n\}$ hvis $S_n \geq L$ (for alle n)
 $\{S_n\}$ er bounded above av M , og
 M er et upper bound for
 $\{S_n\}$ hvis $S_n \leq M$ (for alle n)

b) $\{S_n\}$ er positiv hvis
 $S_n \geq 0$ (for alle n)
 $\{S_n\}$ er negativ hvis
 $S_n \leq 0$ (for alle n)

c) $\{S_n\}$ er stigende hvis
increasing

$S_{n+1} \geq S_n$ (for alle n).

$\{S_n\}$ er synkende/decreasing

hvis $S_{n+1} \leq S_n$ (for alle n).

stigende eller synkende \rightarrow monoton

d) $\{S_n\}$ er alternierende hvis

$S_n < 0 \Rightarrow S_{n+1} > 0$, og

$S_n \text{ aldri lik } 0, \text{ og } S_n > 0 \Rightarrow S_{n+1} < 0.$

Eksempel 9.1. EX3

Vis at følgen

$S_n = \frac{n}{n^2+1}$ er synkende

Løsning

Grenseverdi av Følge

sb

EX:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{1/n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + n = \infty$$

Uformell def

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L \quad \text{hvis}$$

For alle nøyaktigheter ε

Finnes det et tidspunkt N_ε

Slik at du alltid etter dette

er innenfor den krevde nøyaktighet
avstand til L .

Formell

Uansett $\varepsilon > 0$ finnes N_ε med

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

Utregning

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

s7

EX

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

EX

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

"divergerer til ∞ "

EX

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 = -\infty$$

EX

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & n \text{ partall} \\ -1 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

divergerer

Funfact

$(-1)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ har to akkumulasjonspunkter $+1, -1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n \rightarrow 0, -2, +4, -8, +16, \dots$ har to akkumulasjonspunkter $+\infty$ og $-\infty$

Eksempel 9.1. EX 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = ?$$

$$\text{Hvis } L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{5x^2 + x - 3}$$

så vil

$$\frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

Løsning

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{5x^2 + x - 3} =$$

⋮

Fölger: Avsluttende kommentarer s 9

Thm 1

$\{S_n\}$ converges $\Rightarrow \{a_n\}$ bounded

Thm 2

$\{S_n\}$ ultimately increasing \Rightarrow
converges or diverges to ∞

Thm 3

$|x| < 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 0$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} = 0$

EX: Bruk av Thm

$$S_1 = 1 \quad S_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

Finne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Løsning

⋮

Rekker

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \text{dersom}$$

$$\sum_{n=1}^M a_n = S_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} L$$

Kjente rekker

- Den konstante

$$1+1+1+\dots = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -4 = -\infty$$

- Den geometriske $|r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

<p>Note: "Første ledd" $r=1$: Konst. Bevis</p>
--

- Den harmoniske

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(selv om $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

Bevis ved -integrasjon, eller
 -oppsamling

Konvergens av Rekker

S11

- Vanskeligere enn følger
- Mange nye metoder
- Kreativitet + Intuisjon
- Lære ved eksempler
- Les Teoremer selv ved behov

EX R1

$$3 + \frac{-3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{-3}{8} + \frac{3}{16} \dots$$

Løsn

EX R2

Finn $\sum \frac{3}{2^n}$

Løsn

EX R3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

(se tavla)
Konvergerer?

512

Boka
p509

EX R4

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

(Konvergerer?)

EX R5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$$

(Finn summen)

EX R6

Vis at $\sum n^{-p} = \sum \frac{1}{n^p}$

$p > 1$: konvergerer

$p < 1$: divergerer

EX R7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Konv?

EX R8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$$

Konv?

EX R9

S13

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Konv?

EX R10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

Konv?

EX R11

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$, a_n = \frac{n+5}{n^3-2n+3}$$

EX R12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$$

Ratio-testen: Ser rekken ut som en geometrisk rekke?

Viktig!

EX R13

$$\sum \frac{99^n}{n!}$$

EX R14

$$\sum \frac{n^5}{2^n}$$

EX R15

$$\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Absolutt og Betinget Konvergens

s14

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

absolutt dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ikke konv. men

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv kalles det

betinget konvergens

Teorem

$\sum |a_n|$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ konv

Bevis

$$\sum 0 \leq \underbrace{\sum a_n + |a_n|}_{\text{konv.}} \leq \sum 2|a_n|$$

\Rightarrow konv.

$$\sum a_n = \sum a_n + |a_n| - \sum |a_n| \quad \text{konv.}$$

Forsiktig!

$$\sum 0 \neq \sum 1 - \sum 1$$

Eksempel: Harmoni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots$$

Konvergerer ikke absolutt

Vanlig konvergens fordi

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n^2+n} \text{ gir } \sum \frac{(-1)^n}{n} =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{30} - \dots \text{ konvergerer.}$$

Hvorfor Bry Seg?

Vi kan kun bytte i summen dersom er absolutt!

rekkefølge konvergens

$$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} > 0$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} > 0$$

$$-\frac{1}{5} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{100} > 0$$

$$-\frac{1}{7} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{1000} > 0$$

ooo

sum >> 0!

Test for vanlig konvergens
på alternerende rekker:

S16

Etter en N så

-leddene blir mindre

-leddene går mot 0

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad n \geq N$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

EX:

Finn abs. og bet. konv. for

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$$

Løsn
