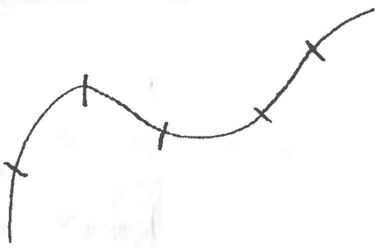
FORNotat
kap 7 del2 s1

Kap 7
Integrasjon på vanskelige områder

Buelengde
- Lengden på en graf
- Arc length & Surface area kap 7.3
- Eksempel: Jorda i ellipse, hvor langt er det for Jorda rundt sola?

Oppdeling



$\overset{?}{\approx}$  "dx"

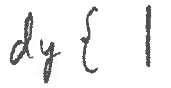
$\overset{?}{\approx}$  "dy"

$\overset{?}{\approx}$  "dx, dy"

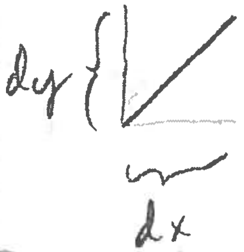
$$L = \int dL \qquad dL = ?$$

$dL = ?$

$dL = dx$

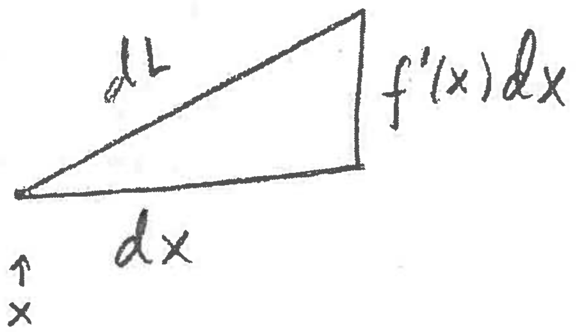


$dL = dy$



$dL^2 = dx^2 + dy^2$

Generelt



zoom uendelig langt inn så blir ~ → /

$$L = \int dL = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$L = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

Boka 7.3.EX1

Eksempel

Finn lengden på grafen til $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ fra $x = 1$ til $x = 8$.

Løsning

$$L = \int dL = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2}\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$L = \int_{x=1}^{8} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\, dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{1 \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}}\, dx$$

$$u = x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}$$

$$du = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{2}\, du$$

$$L = \int_{x=1}^{8} x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{u}\, dx$$

$$L = \int_{x=1}^{8} \frac{3}{2} \sqrt{u}\, du$$

$$L = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1+\frac{4}{9}}^{u=4+\frac{4}{9}}$$

$$L = \left(4 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$$

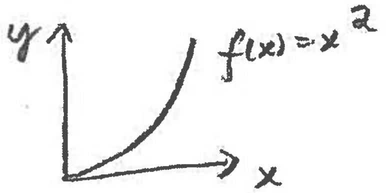
Eksempel

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beskriver en ellipse , finn omkretsen

Boka 7.3.Ex4 p 408

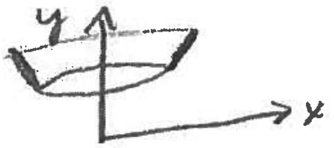
Løsning

Overflateareal : Eksempel



Rotér om y-aksen, finn overflaten. $x \in [0,1]$

Løsning



$$A = \int dA = \int \text{"grunnlinje"} \cdot \text{"høgde"}$$

$$A = \int 2\pi r \, dl$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$$

$$f'(x) = 2x$$

$$dl = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \qquad r = x$$

$\boxed{\text{Boka: } 7.3.\text{ EX } 6 \text{ p } 410}$

$$A = 2\pi \int_{x=0}^{1} x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$u = 4x^2 + 1$$
$$du = 8x\, dx$$

$$A = 2\pi \int_{x=0}^{1} \frac{1}{8} \sqrt{u}\, du$$

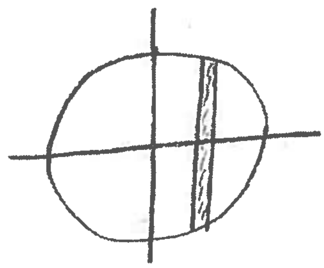
$$A = 2\pi \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2 \cdot 3} \left(5\sqrt{5} - 1\sqrt{1} \right).$$

Massesenter

- Masse (Mass)
- Moment (Moment)
- Massesenter (Centre of Mass)

Masse-eksempel

La R være disken $x^2+y^2=1$
med massetetthet $\delta = 2+x$.
Finn Massen til R



Løsning

$\delta = \delta(x,y) = 2+x$

$M = \int dM = \int \delta \cdot dA$

$M = \int \delta \, dx \, dy$

$h = 2\sqrt{1-x^2}$

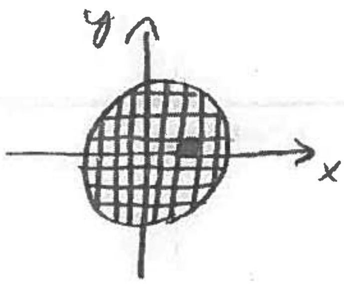
$M = \int (2+x) \text{"}h\text{"} \cdot dx$

$\boxed{\text{W. A.}}$

$M = \int_{x=-1}^{1} (2+x) \cdot 2\sqrt{1-x^2} =$

Merk

$M = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2+x) \, dy \, dx$



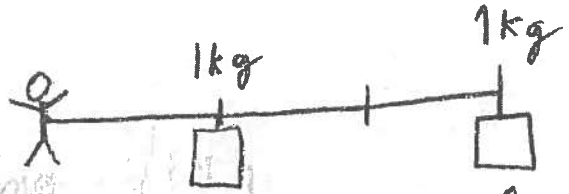
Moment

$M_{x=0}$ moment om $x=0$ ("y-aksen")

M masse (totalt)

$\bar{x} = x_{cm}$ x-koordinat centre of mass

$$x_{cm} = \frac{M_{x=0}}{M} \iff M_{x=0} = M \cdot x_{cm}$$



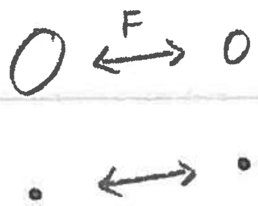
"føles 3 ganger så tung"

Massesenter

Hvis all massen var samlet på ett sted, hvor skulle det vært?

Fysikk

Tyngdekraft



Banan

Rotasjon – må vite formen

Translasjon – må vite M og x_{cm}

(y_{cm}, z_{cm}) (masse og massesenter)

Eksempel

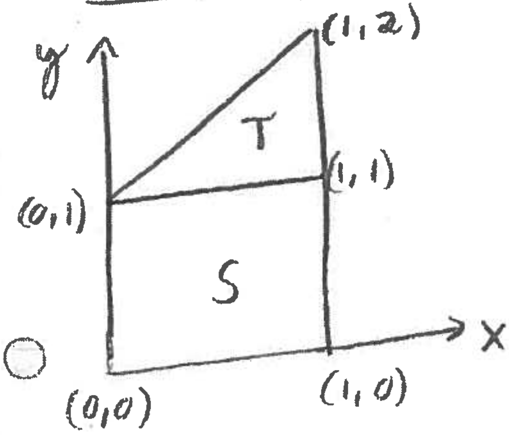
Finn massesenteret til rektangelet $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ med massetetthet $\sigma(x,y) = y$

Løsning

Massesenter med konstant tetthet

Sentroider   Centroids

Eksempel



Bøka 7.5. EX 3 p 420

Find the centroid.

Løsning 1 : Bruk tegningen

S: $x_{cm} = \frac{1}{2}$ $y_{cm} = \frac{1}{2}$ $M = 1$

T: $x_{cm} = \frac{2}{3}$ $y_{cm} = \frac{4}{3}$ $M = \frac{1}{2}$

"Massesenter : Der hele massen er plassert hvis vi ser bort i fra formen"

totalt

$$x_{cm} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{M} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$y_{cm} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}{M} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

$$M = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

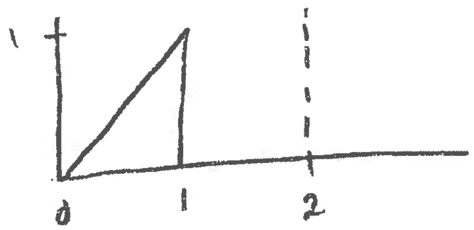
Løsning 2 : Regn ut som massesenter

! (?)

Pappus' Teorem

- Se i boka s. 421
- Magisk triks!

Eksempel



Volum $= 2\pi \bar{r} A$

Fysikkanvendelser

Arbeid : Kraft × Strekning

ex: $F(x) = kx$ strekning $x \in [a,b]$

$$W = \int_{x=a}^{b} dW = \int_{x=a}^{b} F(x)dx = \int_a^b kx\,dx = \frac{k}{2}(b^2 - a^2)$$

Trykk

Pressure

$$P = \frac{F}{A}$$

P trykk N/m^2

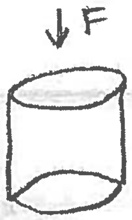
F kraft $N = kg\,m/s^2$

A areal m^2

Eksempel

Vi pumper luften ut av en metallsylinder med $(r = 1, h = 1)$. Hvor mye kraft virker på toppen av sylinderen?

Løsning



$p = 1\,atm = 1$ atmosfære

$p = 101 \cdot 10^3\ N/m^2$

$$F = \int_{\circ} dF = \int_{\circ} p \cdot dA = p \cdot \int_{\circ} dA = p \cdot \pi r^2$$

$F \approx 317 \cdot 10^3\ N/m^2$ Ekvivalent til

$F = m_E g \Rightarrow m_E \approx \frac{317}{9.8} \cdot 10^3\ kg \approx$ 32 Tonn

Eksempel

Boka
7.6.ex 5
p 426

Kraften på et legeme (en ting) med masse m i en høyde h over jorda er

$$\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

$$F(h) = \frac{Km}{(R+h)^2}$$

Finn arbeidet som skal til for

a) løfte opp til høyde H.

b) løfte uendelig høyt (unnslippe).

Løsning

Anvendelser

i Business, Finans og Økologi

Eksempel 7.7.1

Total inntekt fra marginalinntekt

(se boka / tavla)

Eksempel 7.7.2

Net Present Value

(se boka / tavla)

[Evt. andre eksempler]