

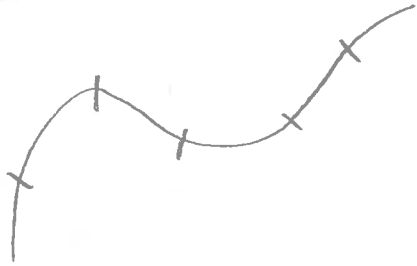
Kap 7

Integrasjon på vanskelige områder

Buelengde

- Lengden på en graf
- Arc length & Surface area kap 7.3
- Eksempel: Jorda i ellipse, hvor langt er det for Jorda rundt sola?

Oppdeling



"dx"



"dy"

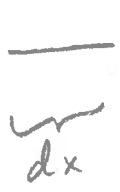


"dx, dy"

$$L = \int dL$$

$$dL = ?$$

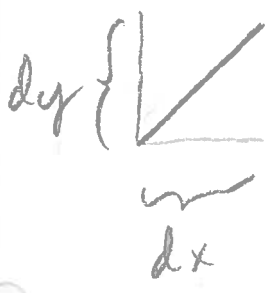
dL = ?



dL = dx

dy { |

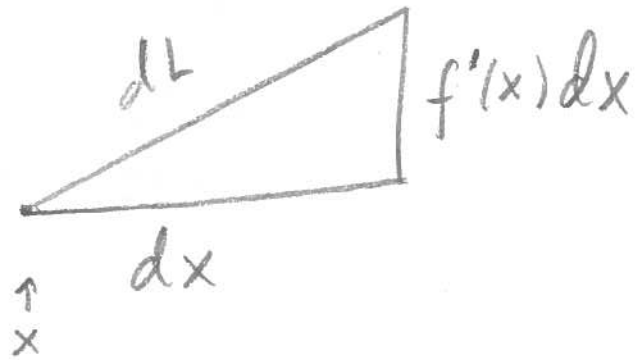
dL = dy



dL^2 = dx^2 + dy^2

Generelt

Zoom uendelig langt inn så blir  -> 



$L = \int dL = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Eksempel

Finn lengden på grafen til $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ fra $x = 1$ til $x = 8$.

Boka 7.3.Ex1

Løsning

$$L = \int dL = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$L = \int_{x=1}^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{1 \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}} dx$$

$$L = \int_{x=1}^8 x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{u} dx$$

$$u = x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}$$
$$du = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx$$
$$x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} du$$

$$L = \int_{x=1}^8 \frac{3}{2} \sqrt{u} du$$

$$L = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=1+\frac{4}{9}}^{u=4+\frac{4}{9}}$$

$$L = \left(4 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$$

Eksempel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ beskriver}$$

en ellipse \oplus , finn omkretsen

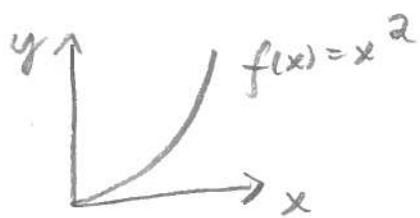
Boka
7.3.Ex4
P 408

Løsning

⋮

[Faint handwritten notes, possibly including the formula for the circumference of an ellipse: $C = 2\pi a \sqrt{1 - e^2}$]

Overflateareal: Eksempel



Rotér om y-aksen,
finn overflaten. $x \in [0, 1]$

Løsning



$$A = \int dA = \int \text{"grunnlinje"} \cdot \text{"høyde"}$$

$$A = \int 2\pi r \, dl$$

$$f'(x) = 2x \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (f')^2} \, dx$$

$$dl = \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

$$r = x$$

Boka:
7.3. EX 6
p 410

$$A = 2\pi \int_{x=0}^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

$$u = 4x^2 + 1$$
$$du = 8x \, dx$$

$$A = 2\pi \int_{x=0}^1 \frac{1}{8} \sqrt{u} \, du$$

$$A = 2\pi \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2 \cdot 3} (5\sqrt{5} - 1\sqrt{1})$$

Massesenter

- Masse (Mass)
- Moment (Moment)
- Massesenter (Centre of Mass)

Masse-eksempel

La R være disken $x^2 + y^2 = 1$
 med massetetthet $\delta^2 = 2 + x$.
 Finn Massen til R

Løsning

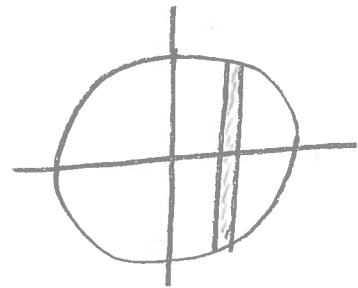
$$\delta^2 = \delta^2(x, y) = 2 + x$$

$$M = \int dM = \int \delta^2 \cdot dA$$

$$M = \int \delta^2 dx dy$$

$$M = \int (2+x) \cdot h \cdot dx$$

$$M = \int_{x=-1}^1 (2+x) \cdot 2\sqrt{1-x^2} =$$



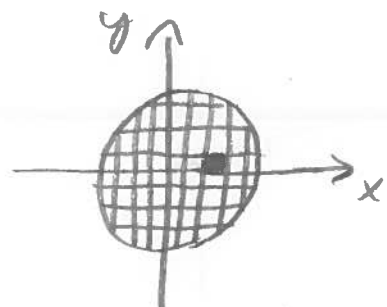
$$h = 2\sqrt{1-x^2}$$

W.A. —

Merk $\sqrt{1-x^2}$

$$M = \int \int (2+x) dy dx$$

$$x=-1 \quad y=-\sqrt{1-x^2}$$



Moment

$M_{x=0}$ moment om $x=0$ ("y-aksen")

M masse (totalt)

$\bar{x} = x_{cm}$ x-koordinat centre of mass

$$x_{cm} = \frac{M_{x=0}}{M} \Leftrightarrow M_{x=0} = M \cdot x_{cm}$$



Massecenter

Hvis all massen var samlet på ett sted, hvor skulle det vært?

Fysikk

Tyngdekraft



Banan 

Rotasjon - må vite formen

Translasjon - må vite M og x_{cm}

(y_{cm}, z_{cm}) (masse og massecenter)

Eksempel

Finn massesenteret til rektangelet
 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ med
masse tetthet $\sigma(x,y) = y$

Løsning

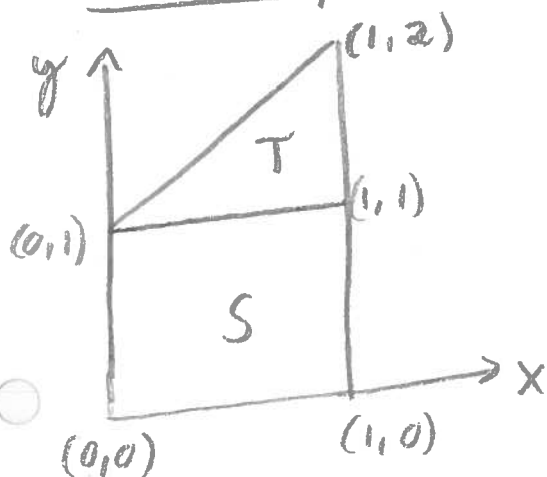
[Faint handwritten notes and a small square diagram]

Massesenter med konstant tetthet

59

Sentroider Centroids

Eksempel



Braka
7.5. EX3
p 420

Find the Centroid.

Løsning 1: Bruk tegningen

$$S: x_{cm} = \frac{1}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{2}$$

$$M = 1$$

$$T: x_{cm} = \frac{2}{3}$$

$$y_{cm} = \frac{4}{3}$$

$$M = \frac{1}{2}$$

"Massesenter: Der hele massen er plassert
hvis vi ser bort i fra formen"

$$x_{cm} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{M} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{5}{9}$$

$$\text{totalt } y_{cm} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}}{M} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{7}{9}$$

$$M = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

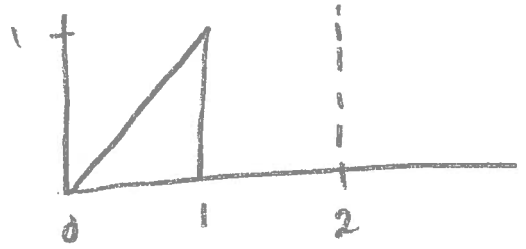
Løsning 2: Regn ut som massesenter

! (?)

Pappus' Teorem

- Se i boka s. 421
- Magisk triks!

Eksempel



$$\text{Volum} = 2\pi \bar{r} A$$

Faint handwritten notes:
Pappus' Teorem
S: 20-21
S: 4-5

Eksempel

512

Kraften på et legeme
(en ting) med masse m i
en høyde h over jorda er

Boka
7.6.ex 5
P 426

$$F(h) = \frac{K_m}{(R+h)^2}$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

Finn arbeidet som skal til for

a) løfte opp til høyde H .

b) løfte uendelig høyt (unnslippe).

Løsning

Anvendelser

i Business, Finans og Økologi

Eksempel 7.7.1

Total inntekt fra marginalinntekt

┆ (se boka / tavla)

Eksempel 7.7.2

Net Present Value

┆ (se boka / tavla)

[Evt. andre eksempler]