Kap 7

- Integrasjon på vanskelige områder
  - se oversikt
- Veldig eksamensrelevant
- Forståelsen veldig viktig senere
  - Matte 2
  - Fysikk
  - Ingeniørfag

Boka: 7.1. EX 3
side 394

Starteksempel

Forklaring / Metoden kommer etterpå

La $f(x) = \frac{1}{x}$ for $x \in [1, \sqrt{2}]$. Drei $f(x)$ rundt x-aksen.
Hvor stort blir volumet?

Løsning

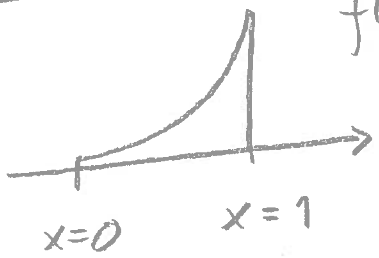
Oppdeling

$$A = \int \Delta A = \int dA$$

$$V = \int \Delta V = \int dV$$

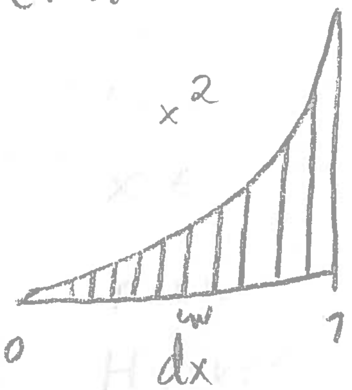
EX

$$f(x) = x^2$$



$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

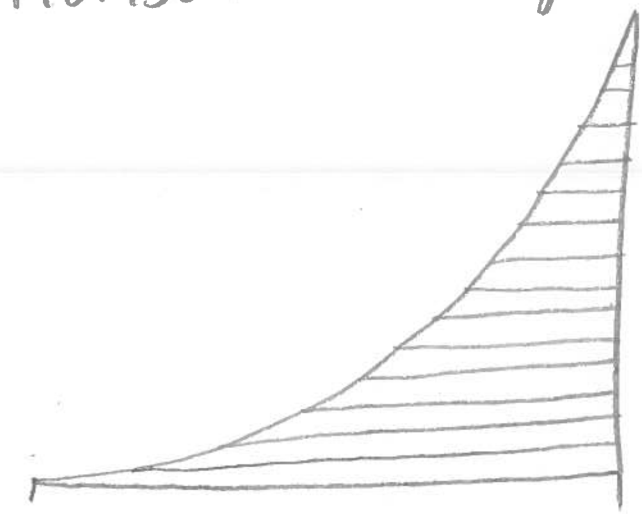
Vertikal deling



$$A = \int dA = \int dx \cdot h$$

$$A = \int_{x=0}^{1} dx \cdot f(x) = \int_{x=0}^{1} f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Horisontal deling



$$A = \int dA = \int_{y=0}^{1} b \cdot dy$$

$$b = \text{"}x=1\text{"} - \text{"}x=\sqrt{y}\text{"}$$

$$b = 1 - \sqrt{y}$$

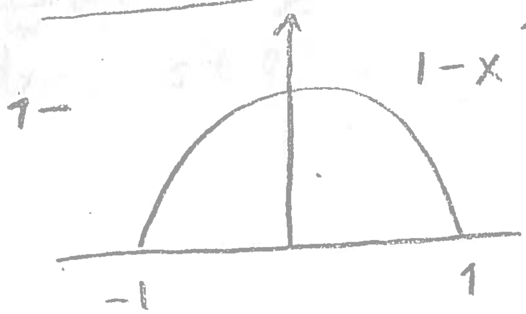
$$A = \int_0^1 1 - y^{1/2}\,dy = \left[y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Test 7.T1

Kan vi dele opp

	Horisontalt	Vertikalt
a)	Ja	Ja
b)	Ja	Nei
c)	Nei	Ja
d)	Nei	Nei

Test 7.T2



Del opp i horisontale striper

a) $A = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx$

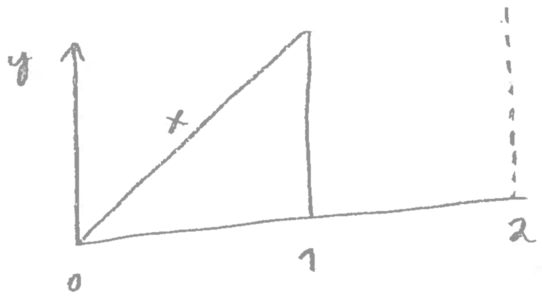
b) $A = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-y} \, dy$

c) $A = \int_{0}^{1} \sqrt{1-y} - (-\sqrt{1-y}) \, dy$

Boka: 7.1.8

$b = 2$
$a = 1$

Eksempel



Finn volumet av legemet begrenset av $y=0$, $y=x$, $x=1$ dreid rundt $x=2$.

Gjør begge måtene

Løsning

Boka:
7.2. EX 3
p402

Eksempel 2

To (sirkulære) sylindre, med radius 1, skjærer hverandre slik at senter-aksene møter hverandre rettvinklet. Finn volumet av det området som ligger innenfor begge sylindrene.

Løsning

1. Tegn de forskjellige forståelsene av oppgaven.

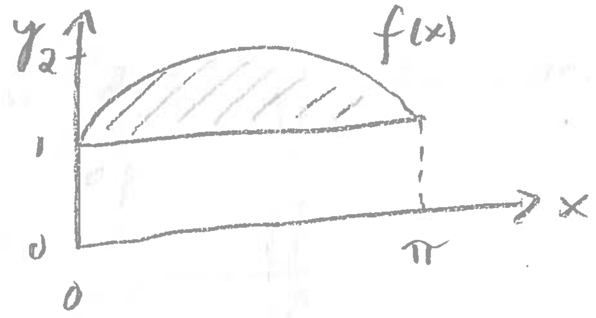
Boka:
Oppg 7.1.8

Eksempel 3

R is bounded by
$y = 1 + \sin(x)$ and $y = 1$
from $x = 0$ to $x = \pi$.
Find the volume when rotating
about the a) x-axis

b) y-axis

Løsning



x-axis

$$A = \int dA = \int dx \cdot (\pi r^2 - \pi \cdot 1^2) = \int_{x=0}^{\pi} \pi (f(x)^2 - 1)\, dx$$

$$A = \int_0^{\pi} \pi (2 \sin x + \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} 2 \sin x + \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \pi \left[-2 \cos x + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \left(--2 - -2 + \tfrac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\pi \left(4 + \tfrac{\pi}{2} \right)}}$$

x-axis horisontalt

$A = \int dA = \int dy \cdot 2\pi r \cdot h \quad , \quad r = y$

$h = ? \quad y = 1 + \sin x \quad x = \arcsin(y-1)$

$h = (\pi - \arcsin(y-1)) - \arcsin(y-1)$

$A = \int_{y=1}^{2} 2\pi y(\pi - 2\arcsin(y-1))$

W. Alpha

$A = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi(8+\pi)}}$

b) y-axis vertikalt

$A = \int dA = \int dx \cdot 2\pi r h \qquad r = x$

$h = f(x)$

$A = \int_{x=0}^{\pi} 2\pi x \cdot \sin x \cdot) \, dx$

W. Alpha

$A = \underline{\underline{\pi^2 \cdot 2}}$

y-axis horisontall

$$A = \int dA = \int \pi r^2 \cdot dy$$

$$r^2 = (\pi - \arcsin(y-1))^2 - \arcsin(y-1)^2$$

$$A = \pi \int_{y=1}^{2} (\pi - \arcsin(y-1))^2 - (\arcsin(y-1))^2 \, dy$$

$$A = \pi \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

W. Alpha