

Differensiallikninger

For Notat Kap 18
side 1

- Differential equations
- Likninger m/ differensialer

$$dy = 2x dx$$

- Kap 7.9, 18.1, 18.3, ikke i rekkefølge
- Mål: Se oversikt

Brak tid

Løse en likning

EX $\frac{x^2 + 2}{5} = 1 + \frac{12}{10}$

1) Gjette $x=3$ & sjekke

2) Løse ... $x=3$ og $x=-3$

Lage en likning

EX Lag en oppgave med $x=4$

$$\frac{x}{2} = 1+1, \left(\frac{x}{2}\right)^2 = (1+1)^2,$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3 = (1+1)^2 - 3,$$

Funksjonslikning

EX $y'(x) = 3x + 2$

Kan skrives $y'(x) \equiv 3x + 2$

og $y'(x) = 3x + 2 \quad \forall x$

Lage en funksjonslikning

52

$$y(x) = x^2 + 3$$

$$y'(x) = 2x$$

$$y(x) = \left(\frac{y'(x)}{2}\right)^2 + 3$$

sant for alle x .

For $x \geq 0$:

$$y(x) - 3 = x^2$$

$$x = \sqrt{y(x) - 3}$$

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x) - 3}$$

Typisk differensiallikning (ODE)

Poll 1

Hvilken funksjon løser $y'(x) = 2\sqrt{y(x) - 3}$

a) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = 2x$

d) ingen av disse

e) HÆ?

f(x) løser ODE

53

EX

Vis at $f(x) = e^x + \sin(x)$

løser $\frac{dy}{dx} = y + \cos(x) - \sin(x)$

Løsning

EX

Vis at $y(t) = e^t + \cos t$ løser

$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} y(t) = y''(t) = -y(t) + 2e^t$

Løsning

$f(x)$ løser I.V.P.

54

EX Vis at $f(x) = x + e^x$ løser

Initial Verdi Problemet

$$\frac{dy}{dx} = y + (x-1)$$

$$y(0) = 1$$

ODE, funksjonslikning

Initialverdi, tall-likning

Løsning

|
|
|
|

Poll 2

Hvordan sjekker man om $f(x)$ løser
ODE/IVP?

a) Løser likningene

b) Sjekker én av likningene

c) Sjekker alle likningene

Uvanlige likningssett

55

EX: Vis at $f(x) = x + e^x + 1$ løser

$$f'(x) = f(x) - x$$

$$f'(x) - 1 = f''(x)$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 2 + e$$

$$f'(0) = f(0)$$

Løsning

Underforstått: Sjekk alle.

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f(x) - x = x + e^x + 1 - x = 1 + e^x$$

$$f'(x) = f(x) - x$$

$$f'(x) - 1 = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

$$f'(x) - 1 = f''(x)$$

$$f(0) = 1 + e^0 = 2$$

$$f(1) = 1 + e + 1 = 2 + e$$

$$f'(0) = 1 + 1 = 2$$

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = f(0)$$

Løsningsmetoder for ODE/IVP

56

- Gjette-og-sjekke ($a e^{kx}$)
- Separasjon av variable

EX

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + C}$$

uansett C

- Integrerende faktor

EX

$$xy' = -y + 2 \Rightarrow xy' + y = 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} xy = 2 \Rightarrow xy = 2x + C$$

$$\Rightarrow y = 2 + \frac{C}{x}$$

uansett valg
av C

- Variasjon av parametre
- Ekvivalent med Integ.faktor

EX

$$f(x) = e^{2x} \text{ løser } \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

Finn $k(x)$ slik at

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x^3 \sin x$$

- Avansert gjette-og-sjekke

Eksempel: Separasjon av variable

57

- På tavla
- Ha x 'er og y 'er på hver sin side og integrerer.

Oppg
LØS IVP $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

← Først
← Etterpå eller
integrasjonsgrense

Løsning

$$dy = x^2 y^3 dx \quad dy \cdot \frac{1}{y^3} = x^2 dx$$

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int x^2 dx \quad -\frac{1}{2} y^{-2} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$y^{-2} = -\frac{2}{3} x^3 + C_2$$

$$y^{-2} \Big|_{x=1} = -\frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=1} + C_2$$

$$\frac{1}{9} = -\frac{2}{3} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1+6}{9} = \frac{7}{9}$$

$$y^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} x^3 + \frac{7}{9}} = \frac{9}{-6x^3 + 7}$$

$$y = \sqrt[3]{7 - 6x^3}$$

□

Eksempel: Integrerende Faktor

58

• På tavla

• En ting å huske:

La $y(x) = f(x) \cdot h(x)$ med hjelpe- h

Oppgave

Solve (løs)

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - xy$$

7.9.Ex8

Løsning

$$y = f \cdot h$$

$$f' \cdot h + f h' = x^3 - x f h$$

Kan velge $h' = -xh$

$$\text{slik at } f' \cdot h + \cancel{f h'} = x^3 - \cancel{x f h}$$

$$f' h = x^3$$

Det vil si $\frac{dh}{dx} = -xh$, $\frac{dh}{h} = -x dx$

$$\int \frac{dh}{h} = \int -x dx, \ln h = -\frac{x^2}{2}$$

$$h = e^{-x^2/2}$$

$$f' h = f' \cdot e^{-x^2/2} = x^3$$

$$f' = x^3 e^{x^2/2}$$

Hittil

$$y = f \cdot h$$

$$h = e^{-x^2/2}$$

$$f' = x^3 e^{x^2/2}$$

$$f = \int x^3 e^{x^2/2} dx = \int \underset{v}{u} \cdot \underset{w'}{\frac{1}{2}} e^{u/2} du$$

59

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$= u \cdot 1 \cdot e^{u/2} - \int 1 \cdot 1 \cdot e^{u/2} du$$

$$= x^2 e^{x^2/2} - 2 e^{x^2/2} + C$$

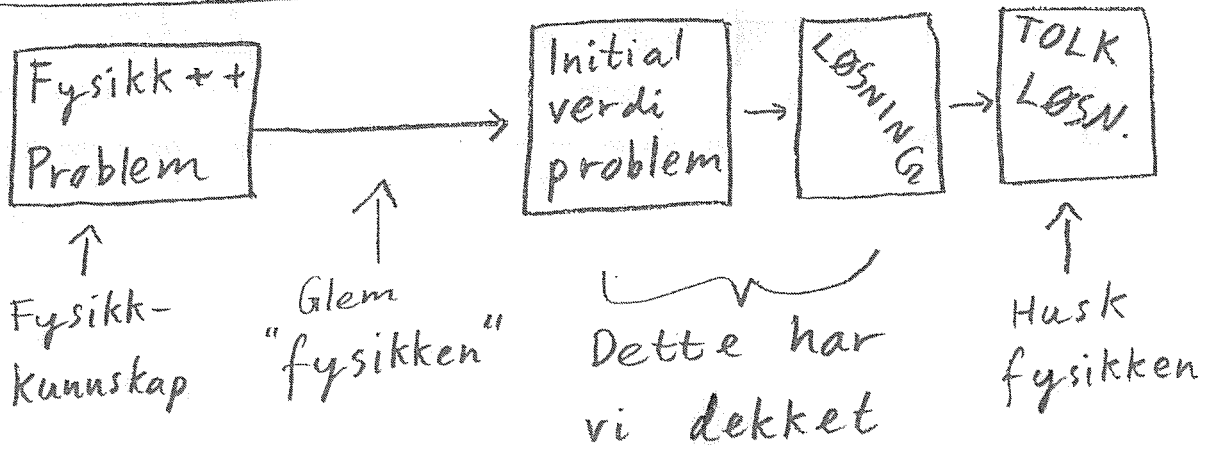
$$y = f \cdot h = \left((x^2 - 2) e^{x^2/2} + C \right) e^{-x^2/2}$$

$$y = x^2 - 2 + C e^{-x^2/2}$$

uansett
valgt C

Anvendelser av Difflikn

SLO



Eksempel 1

R-L-C-circuit

• Se tavle/notat

7.9.EX9
P 452

Eksempel 2

• Familie av kurver

• Selv om dette ser ut

som et matte (ikke fysikk) problem,

gjør oppdeling som over

• Se tavle/notat

7.9.EX6
P 449

Appendix 1

○ Integrallikning

$$y(t) = \int_{-1}^t (y(x))^2 x dx$$

$$y(0) = \int_{-1}^0 (y(x))^2 x dx$$

hva?!

Nå: Deriver den

$$y' = (y(x))^2 \cdot x \Big|_{x=t}$$

$$y(-1) = \int_{-1}^{-1} y^2 x dx$$

$$\underline{y(-1) = 0}$$

$$\underline{y' = y^2 \cdot t}$$

Klassifisering

ODE (vs PDE)

Orden

"høyeste deriverte"

Linear

y og y' -ledd, ikke y^2 eller $(y')^{-2}$ eller $\ln y \dots$

○ Homogen $y' = \text{noe} \cdot y$ (linear)

$$y' - 2xy = 0$$

Inhomogen $y' + x^2 + y = 0$

Slope field

○ Se boka s. 1000 (!)

Appendix 2a

● Eksistens og entydighet

$y' = x$ $y(0) = 0$ har nøyaktig
en løsning $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ingen løsninger

EX: $y' = \frac{1}{y}$
 $y(0) = 0$

EX: $(y')^2 = -(y^2 + 1)$
 $y(0) = 0$

● Uendelig mange løsn

EX: $y' = \frac{1}{4}y^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^{-3}, y(0) = 0$

$y^3 dy = \frac{1}{4} dx, \frac{1}{4} y^4 = \frac{1}{4} x + C$

$y = \sqrt[4]{x - C}$ med $C = 0$ fungerer.

● Påstand

$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \sqrt{x-a}, & \end{cases}$

Appendix 2b

Uendelig mange løsninger

$$y(x) = (x-a)^{3/2}$$

$$y'(x) = \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}$$

kun for
 $x \geq a$

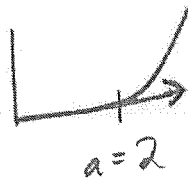
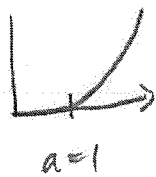
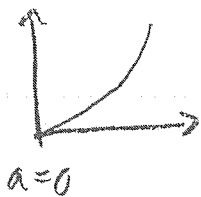
$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^{3/2}, & x \geq a \\ 0, & 0 \leq x < a \end{cases}$$

$$y'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}, & x \geq a \\ 0, & 0 \leq x < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$0 \leq x < \infty$

- har uendelig mange løsninger:



etc.

