Differensiallikninger

- Differential equations
- Likninger m/ differensialer

  $dy = 2x\,dx$
- Kap 7.9, 18.1, 18.3, ikke i rekkefølge

  $\boxed{\text{Bruk tid}}$
- Mål: Se oversikt

Løse en likning

EX $\dfrac{x^2+2}{5} = 1 + \dfrac{12}{10}$

1) Gjette $x=3$ & sjekke
2) Løse ... $x=3$ og $x=-3$

Lage en likning

EX Lag en oppgave med $x=4$

$\dfrac{x}{2} = 1+1$, $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = (1+1)^2$,

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 3 = (1+1)^2 - 3$,

Funksjonslikning

EX $y'(x) = 3x+2$

Kan skrives $y'(x) \equiv 3x+2$

og $y'(x) = 3x+2 \quad \forall x$

Lage en funksjonslikning

$y(x) = x^2 + 3$

$y'(x) = 2x$

$y(x) = \left(\frac{y'(x)}{2}\right)^2 + 3$ sant for alle x.

For $x \geq 0$:

$$y(x) - 3 = x^2$$

$$x = \sqrt{y(x) - 3}$$

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x) - 3}$$

Typisk differensiallikning (ODE)

Poll 1

Hvilken funksjon løser $y'(x) = 2\sqrt{y(x) - 3}$

a) $f(x) = 2\sqrt{x - 3}$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = 2x$

d) ingen av disse

e) HÆ?

f(x) løser ODE

EX

Vis at $f(x) = e^x + \sin(x)$

løser $\frac{dy}{dx} = y + \cos(x) - \sin(x)$

Løsning

EX

Vis at $y(t) = e^t + \cos t$ løser

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}y(t) = y''(t) = -y(t) + 2e^t$$

Løsning

$f(x)$ løser I.V.P.

EX Vis at $f(x) = x + e^x$ løser

Initial Verdi Problemet

$$\frac{dy}{dx} = y + (x-1) \qquad \text{ODE, funksjonslikning}$$

$$y(0) = 1 \qquad \text{Initialverdi, tall-likning}$$

Løsning

Poll 2

Hvordan sjekker man om $f(x)$ løser ODE / IVP ?

a) Løser likningene

b) Sjekker én av likningene

c) Sjekker alle likningene

Uvanlige likningssett

EX: Vis at $f(x) = x + e^x + 1$ løser

$$f'(x) = f(x) - x$$

$$f'(x) - 1 = f''(x)$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 2 + e$$

$$f'(0) = f(0)$$

Løsning

Underforstått: Sjekk alle.

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^x \\ f(x) - x &= x + e^x + 1 - x = 1 + e^x \end{aligned}\right\} f'(x) = f(x) - x$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) - 1 &= e^x \\ f''(x) &= e^x \end{aligned}\right\} f'(x) - 1 = f''(x)$$

$$f(0) = 1 + e^0 = 2$$

$$f(1) = 1 + e + 1 = 2 + e$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= 1 + 1 = 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}\right\} f'(0) = f(0)$$

Løsningsmetoder for ODE/IVP

- Gjette-og-sjekke $(a e^{kx})$
- Separasjon av variable

EX

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + C}$$

$\boxed{\text{uansett } C}$

- Integrerende faktor

EX

$$xy' = -y + 2 \Rightarrow xy' + y = 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} xy = 2 \Rightarrow xy = 2x + C$$

$$\Rightarrow y = 2 + \frac{C}{x}$$

$\boxed{\text{uansett valg av } C}$

- Variasjon av parametre
  - Ekvivalent med Integ. faktor

EX

$f(x) = e^{2x}$ løser $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

Finn $K(x)$ slik at

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x^3 \sin x$$

- Avansert gjette-~~og~~-sjekke

Eksempel: Separasjon av variable

- På tavla
- Ha x'er og y'er på hver sin side og integrer.

<u>Oppg</u>

Løs IVP $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

← Først

← Etterpå eller integrasj. grense

<u>Løsning</u>

$$dy = x^2 y^3 dx \qquad dy \cdot \frac{1}{y^3} = x^2 dx$$

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int x^2 dx \qquad \frac{1}{-2} y^{-2} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$y^{-2} = -\frac{2}{3} x^3 + C_2$$

$$y^{-2}\Big|_{x=1} = -\frac{2}{3} x^3\Big|_{x=1} + C_2$$

$$\frac{1}{9} = -\frac{2}{3} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1+6}{9} = \frac{7}{9}$$

$$y^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{9}} = \frac{9}{-6x^3 + 7}$$

$$y = + \cancel{\pm} \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}}$$

□

Eksempel: Integrerende Faktor

- På tavla
- Én ting å huske:

La $y(x) = f(x) \cdot h(x)$ med hjelpe-h

Oppgave

Solve (løs) $\frac{dy}{dx} = x^3 - xy$ $\boxed{7.9.\text{Ex } 8}$

Løsning

$y = f \cdot h$

$f' \cdot h + fh' = x^3 - xfh$

Kan velge $h' = -xh$

Slik at $f' \cdot h + \cancel{fh'} = x^3 \cancel{- xfh}$

$f'h = x^3.$

Det vil si $\frac{dh}{dx} = -xh$, $\frac{dh}{h} = -x\,dx$

$\int \frac{dh}{h} = \int -x\,dx$, $\ln h = -\frac{x^2}{2}$

$h = e^{-x^2/2}$

$f'h = f' \cdot e^{-x^2/2} = x^3$

$f' = x^3 e^{x^2/2}$

Hittil

$y = f \cdot h \qquad h = e^{-x^2/2} \qquad f' = x^3 e^{x^2/2}$

59

$f = \int x^3 e^{x^2/2} dx = \int \underset{v}{u} \cdot \tfrac{1}{2} \underset{w'}{e^{u/2}} du$

$u = x^2$

$du = 2x dx$

$= u \cdot 1 \cdot e^{u/2} - \int 1 \cdot 1 \cdot e^{u/2} du$

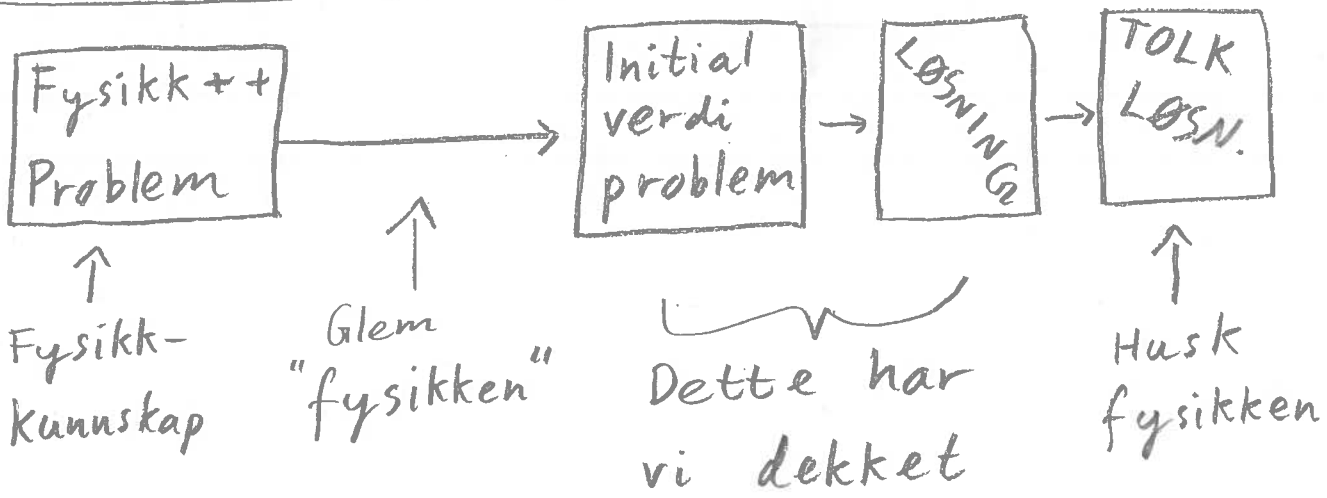
$= x^2 e^{x^2/2} - 2 e^{x^2/2} + C$

$y = f \cdot h = \left((x^2-2) e^{x^2/2} + C\right) e^{-x^2/2}$

$y = x^2 - 2 + C e^{-x^2/2}$

uansett valgt C

Anvendelser av Difflikn



Eksempel 1

7.9.EX9
p 452

R-L-C-circuit

- Se tavle/notat

Eksempel 2

7.9.EX6
p 449

- Familie av kurver
- Selv om dette ser ut som et matte (ikke fysikk) problem, gjør oppdeling som over
- Se tavle/notat

Appendix 1

Integrallikning

$$y(t) = \int_{-1}^{t} (y(x))^2 \, x \, dx$$

$$y(0) = \int_{-1}^{0} y(x)^2 x \, dx$$

hmm?

$$y(-1) = \int_{-1}^{-1} y^2 x \, dx$$

$$\underline{y(-1) = 0}$$

Nå: Deriver den

$$y' = (y(x))^2 \cdot x \Big|_{x=t}$$

$$\underline{y' = y^2 \cdot t}$$

Klassifisering

ODE (vs PDE)

Orden "høyeste deriverte"

Lineær y og y'-ledd, ikke y^2 eller $(y')^{-2}$ eller $\ln y$...

Homogen $y' = \text{noe} \cdot y$ (lineær)

$$y' - 2xy = 0$$

Inhomogen $y' + x^2 + y = 0$

Slope field

Se boka s. 1000 (!)

Appendix 2a

Eksistens og entydighet

$y' = x \qquad y(0) = 0$ har nøyaktig

én løsning $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ingen løsninger

EX: $y' = \frac{1}{y}$

$y(0) = 0$

EX: $(y')^2 = -(y^2+1)$

$y(0) = 0$

Uendelig mange løsn

EX: $y' = \frac{1}{4}y^{-3}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^{-3}, \quad y(0) = 0}$

$y^3\,dy = \frac{1}{4}dx \;, \quad \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4}x + C$

$y = \sqrt[4]{x - C}$ med $C = 0$ funker.

Påstand

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;, & 0 \le x < a \\ \sqrt{x-a} \end{cases}$$

Appendix 2b

Uendelig mange løsninger

$$y(x) = (x-a)^{3/2}$$

$$y'(x) = \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}$$

$\boxed{\text{kun for } x \geq a}$

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^{3/2}, & x \geq a \\ 0, & 0 \leq x < a \end{cases}$$

$$y'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}, & x \geq a \\ 0, & 0 \leq x < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq x < \infty$$

- har uendelig mange løsninger:

etc.