Potensrekke

En rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kalles en **power series about c**

$a_0, a_1, \dots$ kalles **coefficients**

Konvergens

- Hvorfor? Vi kan lage

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{funksjonen}$$

for de x der Σ konvergerer.

- Konvergensradius R: $0 \leq R \leq \infty$

$|x-c| < R$ absolutt konverg.

$|x-c| = R$ vet ikke

absolutt? betinget? ingen?

$|x-c| > R$ divergerer

EX: e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$R = \infty$

Kalles Taylor om c
(Maclaurin)

Eksamen

9.5. EX 1

EX: Typisk oppgave

Finn sentrum, (centrum)
radius, (radius)
og konvergensintervall,
(and interval of convergence), til

$$\sum \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$$

Godt Tid!

Løsn.

Se tavla.

Sum, Gange og Dele

Potensrekker:
- Summér ledd for ledd
- Gange sammen som polynomer (skriv opp relevante ledd)
- Deling ved ?

Konvergensradius:
- Sum $R \geq$ den minste
- Gange $R \geq$ den minste
- Dele ? (se boka)

Finne konvergensradius ved f(x)

e^x def over alt R kan være alt

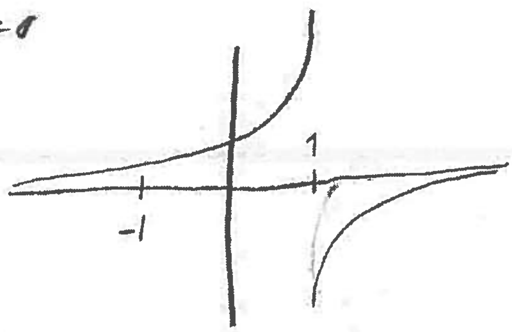
$\frac{1}{1-x}$ ikke def for $x = 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$ ved Taylor-utvikling.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Så rekken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ har $R \leq 1$.

$\boxed{R=1}$



Superfunksjoner

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kan deriveres

og antideriveres ledd for ledd.

Verdi

- $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ kan skrives som rekke

- Vi kan finne rekken til $f(x)$ hvis vi vet rekken til $\int f$ eller $f'(x)$

Typisk eksamensoppg

Eksempel: Arctan

Finn potens/Taylor rekken til $\arctan(x)$ rundt $a=0$, og bestem konvergensradius.

Hint

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ved geometrisk rekke

Likner på Ex 9.5.5 s. 534

Løsning

Se tavla.

Fun fact: Hvor Pen er $f(x)$?

$f(x) = |x| \quad \in C[a,b]$ kontinuerlig på $[a,b]$

$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \in C^2[10,100]$ 2 ganger kont. deriverbar på $[10,100]$.

$f(x) = e^x \in C^\infty$ ∞ ganger deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

$f(x) = e^x$ analytisk Har en potens/Taylorrekke

$f(x) = \frac{1}{1-x}$
Analytisk på $(-1,1)$ da Taylor-rekken konv. på $(-1,1)$.

Husk

Taylor ved $c=0$

$\boxed{\text{Denne er Unik!}}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

så lenge Σ konvergerer.

EX p. 548

Anvendelse Taylorrekker

- Repetisjon
- Find Maclaurin series for $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, and use it to approximate $E(1)$ to 3 decimal places
- Evaluate $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ by using Maclaurin polynomials
- Gå gjennom, eller regne eksamensoppgaver?