Potensrekke

En rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kalles en <u>power series about c</u>

$a_0, a_1, \dots$ kalles <u>coefficients</u>

Konvergens

- Hvorfor? Vi kan lage funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

for de x der Σ konvergerer.

- Konvergensradius R: $0 \leq R \leq \infty$

$|x-c| < R$ absolutt konverg.

$|x-c| = R$ vet ikke

absolutt? betinget? ingen?

$|x-c| > R$ divergerer

EX: e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$R = \infty$

Kalles Taylor om c (Maclaurin)

52 $\boxed{\text{Eksamen}}$

EX: Typisk oppgave

$\boxed{9.5.\text{EX }1}$

Finn sentrum, (centrum)
radius, (radius)
og konvergensintervall,
(and interval of convergence), til

$$\sum \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$$

$\boxed{\text{God Tid!}}$

Løsn.

Se tavla.

Sum, Gange og Dele

Potensrekker:
- Summér ledd for ledd
- Gange sammen som polynomer (skriv opp relevante ledd)
- Deling ved ?

Konvergensradius:
- Sum $R \geq$ den minste
- Gange $R \geq$ den minste
- Dele ? (se boka)

Finne konvergensradius ved $f(x)$

e^x def over alt R kan være alt

$\frac{1}{1-x}$ ikke def for $x = 1$

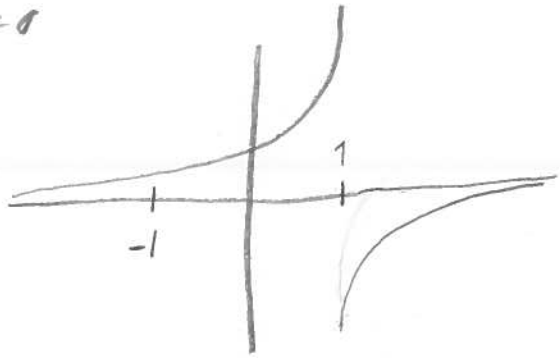
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ved Taylor-utvikling.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Så rekken

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ har $R \leq 1$.

$$\boxed{R = 1}$$



Superfunksjoner

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kan deriveres og antideriveres ledd for ledd.

Verdi

- $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ kan skrives som rekke
- Vi kan finne rekken til $f(x)$ hvis vi vet rekken til $\int f$ eller $f'(x)$

$\boxed{\text{Typisk eksamensoppg}}$

Eksempel: Arctan

Finn potens/Taylor rekken til arctan(x) rundt $a=0$, og bestem konvergensradius.

Hint

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ ved geometrisk rekke

$\boxed{\text{Likner på Ex 9.5.5 s. 534}}$

Løsning

Se tavla.

Fun fact: Hvor Pen er $f(x)$?

$f(x) = |x| \in C[a,b]$ kontinuerlig på $[a,b]$

$f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^2[10,100]$ 2 ganger kont. deriverbar på $[10,100]$.

$f(x) = e^x \in C^\infty$ ∞ ganger deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

$f(x) = e^x$ analytisk Har en potens/ Taylorrekke

$f(x) = \frac{1}{1-x}$
Analytisk på $(-1,1)$ da Taylor-rekken konv. på $(-1,1)$.

Husk

Taylor ved $c=0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Denne er Unik!

så lenge Σ konvergerer.

Anvendelse Taylorrekker

$\boxed{\text{EX p. } 548}$

- Repetisjon
- Find Maclaurin series for
  $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, and use
  it to approximate $E(1)$ to
  3 decimal places
- Evaluate $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ by
  using Maclaurin polynomials
- Gå gjennom, eller regne
  eksamensoppgaver ?