Forelesningsnotater kap 4.6 del 1

Kap 4.6 Sketching the Graph of a Function

[Tittel]

Mål
- Kunne tegne en funksjon ved å bruke $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ og asymptoter

Før
- Lag en stor tabell med $\boxed{x \mid f(x)}$
- Bruke fantasien ellers.

Nå
- Ta med maks, min og vendepunkter
- Linearisere rundt punktet
- Asymptoter

EX: Oppgave 4.6.15

Sketch $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ from -10 to 10

Løsning

Symmetri : $y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = y(x)$

Asymptoter:

"$y(\infty)$" $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) =$

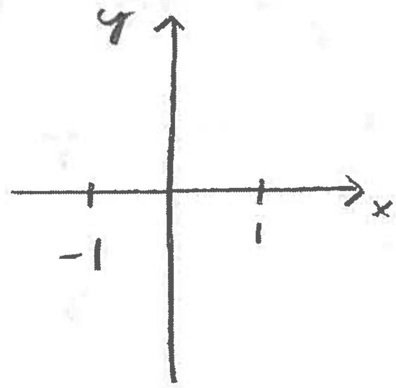
"$y(-\infty)$" $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) =$

"$y(1^-)$" $\lim\limits_{x\to 1^-} y(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} y(x) =$

Så

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$



- Horisontal asymptote $y=1$
- Vertikal asymptote i $x=1$ med $y(1^-) = -\infty$ og $y(1^+) = +\infty$
- Symmetrisk $y(x)$

Deretter

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2-1+1}{x^2-1} = \frac{d}{dx} 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

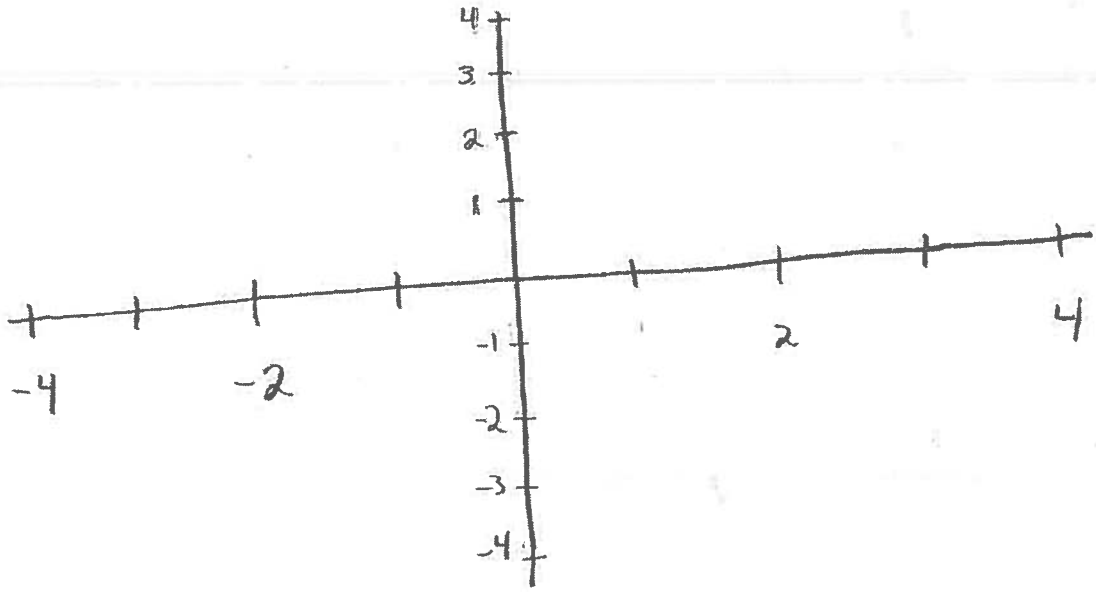
$$= -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'(a) = 0 \iff a = 0$$

$$y'(2) = -\frac{4}{3^2} = -\frac{4}{9} \approx -0.44$$

$$y'(4) = -\frac{8}{15^2} = -\frac{8}{225} \approx -0.04$$

x	$y(x)$
0	0
1	$\pm\infty$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
2	4/3
4	16/15



Forelesningsnotat 4.7

Kap 4.7

- Ex 1 i boka
- Representasjon av tall i PC $(5{,}4439 \cdot 10^{-17})$
- Maskin epsilon
  - MatLab $2 \cdot 10^{-16}$
  - 32/64 bit presisjon
- $\dfrac{7.0043}{1.4142 - 1.4100} = \underbrace{1.66}_{ok}\underbrace{77}_{}\cdot 10^{3}$

Akkumulert "avrundingsfeil" "maskin-ε-feil"

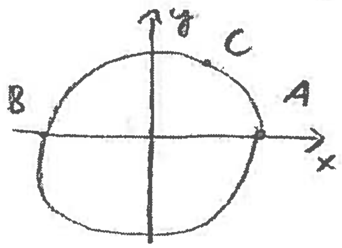
Forelesningsnotat kap 4.8 del 1

Kap 4.8

Mål

- Oversette: Tekstproblem → Matematikkoppgave i konteksten max/min-problemer
- Løse max/min-oppgaven (kap 4.4)
- Oversette: Matte-løsning → Tekst-løsning

EX: 4.8. Example 5



Boka s. 263

$V_{løp} = 2 \ m/s$
$V_{svøm} = 1 \ m/s$ } Hvorfor ikke 2k, 1k

$$\text{tid} = \frac{\text{avstand}}{\text{hastighet}} \qquad \frac{m}{m/s}$$

A : $(x, y) = (1, 0)$ enhet: 20m

B : $(-1, 0)$

C : $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

left blank

Forelesningsnotat kap 4.8 del 2

...

a_{AC} avstand A til C

a_{CB} — " — C til B

t_{AC} tid A til C

t_{CB} tid C til B

t_{TOT} tid totalt avhenger av? θ

$$t_{TOT} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{a_{AC}}{2} + \frac{a_{CB}}{1}$$

avh. av θ

(benevning "20 m")

$$a_{AC} = \theta$$

$$\begin{aligned} a_{CB} &= |(\cos(\theta), \sin(\theta)) - (-1, 0)| \\ &= |(\cos\theta + 1, \sin\theta)| \\ &= \sqrt{(\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos\theta} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Finn } \theta \text{ der } t_{TOT} \text{ er minimal}}$

$\downarrow ?$

$$\boxed{t_{TOT}'(\theta_m) = 0}$$

$$t_{TOT}(\theta) = \frac{\theta}{2} + \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

$$t_{TOT}'(\theta_m) = 0 \quad \text{ved} \quad \theta_m = \frac{\pi}{3}$$

Nei! (Se Forelesning!)

Note to self: gjør en bra [illegible] eller [illegible] [illegible] se på ep kt.

NTS: Tavle

Ferdig oversatt:

$$t_{TOT} = \frac{\theta}{2} + \sqrt{2+2\cos(\theta)} \quad \text{på} \quad \theta \in [0, \pi]$$

Finn θ der t_{TOT} har globalt minimum.

Matte:

Kandidater

$\theta_0 = 0$

$\theta_1 = \pi$

$\theta_2 : \quad t_{TOT}'(\theta_2) = 0$

$$t_{TOT}'(\theta_2) = \frac{1}{2} + \frac{-1 \cdot \sin\theta_2}{\sqrt{2+2\cos\theta_2}} = 0$$

Omgjøring i likningsløsning

$$\frac{1}{2} = \sin\theta_2 \cdot (2+2\cos\theta_2)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{4}(2+2\cos\theta_2) = \sin^2\theta_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta + \cos^2 - 1 = 0$$

$$4 - 4\cos^2\theta_2 - 2 - 2\cos\theta_2 = 0$$

$$\cos^2\theta_2 + \frac{1}{2}\cos\theta_2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos(\theta_2) = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2}}$$

$2 + \frac{1}{4}$

$\frac{8}{4} \rightarrow \frac{9}{4}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\right) = -1 \text{ eller}$$

$\theta_2 = -1$ eller $\theta_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta_2 = \pi$ eller $\theta_2 = \pi/3$ på $\theta \in [0, \pi]$

Forelesningsnotat kap 4.8 del 3

...

Digresjon ferdig

$\theta_0 = 0$ } fra endepkt

$\theta_1 = \pi$ } fra $t' = 0$ test

$\theta_2 = \pi/3$

$$t_{TOT}(0) = \frac{0}{2} + \sqrt{2+2\cos(0)} = \sqrt{4} = 2$$

$$t_{TOT}(\pi) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2+-2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6$$

$$t_{TOT}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{2+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.3$$

t_{TOT} har globalt min. på $[0, \pi]$ ved $\theta_1 = \pi$.

Oversettelse til svar

- Det tar kortest tid dersom vi løper hele veien.
- Sjekk at de andre tallene vi har gir fysisk mening.