Forelesningsnotat kap 4.3 del 1

kap 4.3 Indeterminate forms

"ubestemmelige uttrykk"

Læringsmål

- Vi skal kunne løse vanskelige grenseverdioppgaver
- Vi skal vite når man kan "derivere grenseverdi-uttrykkene"

L'Hopital

Intuitivt:
"Når vi får $\frac{\infty}{\infty}$ eller $\frac{0}{0}$ så kan vi derivere oppe og nede"

ex

Finn $L = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ (fasit: $\frac{1}{2}$)

Intuitivt bevis for L'Hopital (med $\frac{0}{0}$)

Tenk $x \to 1$ og $f(1) = g(1) = 0$

da vil $\frac{f(x)}{g(x)}$ oppføre seg som

$$\frac{\text{tangenten til } f}{\text{tangenten til } g} = \frac{f'(1) \cdot (x-1)}{g'(1) \cdot (x-1)}$$

Spørsmål

Hva med $\infty - \infty$?

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$ kan vi bruke L'H og få

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = -\infty \ ?$$

Svar

Antiex

$$\left. \begin{aligned} L &= \lim_{x \to \infty} (x - 2x) = \lim_{x \to \infty} -x = -\infty \\ L &= \lim_{x \to \infty} (x - 2x) = \lim_{x \to \infty} 1 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} \text{ulike}$$

Forelesningsnotat kap 4.3 del 2

ex Oppg. 4.3.2

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

$$L \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2x-3}\cdot 2}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x(2x-3)}$$

Ikke bruk L'H igjen! - Ville da fått 0

$$L = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$

Flere ubestemmelige uttrykk

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ med L'H, $\infty-\infty$ med felles brøkstrek,

$0\cdot\infty$ lag brøk ex: $x\sin(\frac{1}{x}) = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$

Hva med 0^0, ∞^0 og 1^∞?

Bruk $\ln(L)$ og e^L!

Dette funker fordi logaritme og eksponensialfunksjonen er kontinuerlige

ex

Likning, likning, likning! 3 L'er.

$$L = \lim_{x\to 0} x^x$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-1x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

$$L = e^{\ln L} = e^0 = 1$$

ex: Oppgave 4.3.28

Finn $L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

Løsning

Hvilken "indeterminate form" ?

$L =$

$\ln L = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\ln \sin x - \ln x)$$

$\boxed{\text{Chck on W.A.}}$

Forelesningsnotater kap 4.4

Kap 4.4 Extreme Values

Læringsmål

- Finne og klassifisere max og min på funksjoner [Hvorfor?]

Kandidater for lokale max/min

i) Kritiske punkter $f'(c)=0$

ii) Singulære punkter $f'(c)$ ikke def.

iii) Endepunkter $[a, b]$

[p 235]

[hva har jeg sagt om $f'(x)$ (ref. boka)?]

Kandidater for globale max/min

i) Lokale max/min

ii) Endepunkter som er "tatt bort"

iii) $x \to \infty$ og $x \to -\infty$

ex Oppg. 4.24 på $x \in (0, \infty)$

La $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ finn og klassifiser max/min på intervallet $(0, \infty)$

løsning

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)}$$

[kjekt å ha lov & lurt]

$$f'(a) = 0 \iff \frac{-a^2+1}{a^2+1} = 0 \iff a^2 = 1 \iff \begin{array}{c} a=1 \\ \text{eller} \\ a=-1 \end{array}$$

-1 er ikke med

Det finnes ingen singulære eller endepunkter

Hittil har vi

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ på $(0,\infty)$ dvs. $0 < x < \infty$

$f'(1) = 0$ $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Lokalt max eller min? (Spør salen)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

$f(2) = \frac{2}{5}$

Det er ingen lokale max/min mellom, så vårt punkt $x=1$ er lokalt max

---

Merk at

$f(0) = 0$, men $0 \notin (0,\infty)$

og at

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty+0} = \frac{1}{\infty} = 0$

Hva er de globale max og min? [fyll inn] [tegn grafen]

Forelesningsnotater kap 4.5 del 1

Kap. 4.5 Concavity and Inflection

Læringsmål

- Forstå hvordan grafen til $f(x)$ ser ut når $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$, og $f''(x) = 0$

ex: Oppg 4.5.16

$f(x) = xe^x$ "Bruk $f''(x)$ til å beskrive funksjonen"

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

$$f''(a) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(2+a)e^a = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2+a = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a = -2$$

$$f''(-3) = (2+-3)e^{-3} = -e^{-3} < 0$$

$$f''(0) = (2+0)e^0 = 2 > 0$$

$$f''(-2) = 0$$

$f(x)$ konkav opp på $(0, \infty)$
konkav ned på $(-\infty, 0)$
har inflection point i 0

} Svaret på oppgaven

Merk $f'(-2) = -1 \cdot e^{-2} \approx -\frac{1}{10}$

$\underline{ex}$: Oppg 4.5.33

$f(x) = (x^2-4)^3$ på hele $\mathbb{R}$

Klassifiser alle kritiske punkter

løsning

- Finnes det noen andre lokale max/min enn de kritiske punktene ?

$$f'(x) = 3(x^2-4)^2 \cdot 2x$$

$$f'(a) = 0 \iff 3(a^2-4)\cdot 2a = 0$$

$$\iff a^2-4=0 \text{ eller } a=0$$

$$\iff a=-2, a=2, \text{ eller } a=0$$

$$f''(x) = 6(x^2-4)\cdot 2x \cdot 2x + 6(x^2-4)^2$$

$$f''(x) = 6(x^2-4)(x^2-4+4x^2) = 6\cdot(x^2-4)(5x^2-4)$$

$f''(-2) = 0$ lokalt ?

$f''(0) = 6\cdot 16 > 0$ lokalt ?

$f''(2) = 0$ lokalt ?

Forelesningsnotater kap 4.5 del 2

...

$f(-2) = 0$

$f(0) = (-4)^3 = -64$

$f(2) = 0$

Hva må vi vite for å finne globalt max/min (eller vise at det ikke finnes)?

Så hva er globale max/min?

Forelesningsnotater kap 4.6 del 1

Kap 4.6 Sketching the Graph of a Function

[Tittel]

Mål

- Kunne tegne en funksjon ved å bruke $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ og asymptoter

Før

- Lag en stor tabell med

x	$f(x)$

- Bruke fantasien ellers.

Nå

- Ta med maks, min og vendepunkter
- Linearisere rundt punktet
- Asymptoter

EX: Oppgave 4.6.15

Sketch $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ from -10 to 10

Løsning

Symmetri : $y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = y(x)$

Asymptoter:

"$y(\infty)$" $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) =$

"$y(-\infty)$" $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) =$

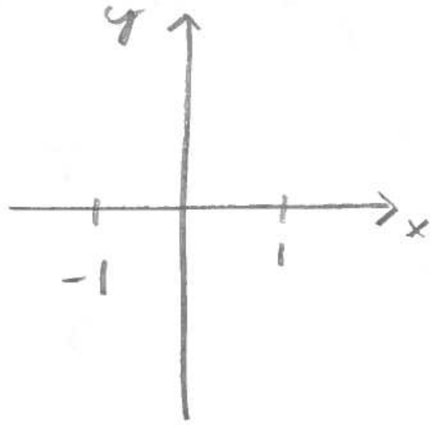
"$y(1^-)$" $\lim\limits_{x\to 1^-} y(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} y(x) =$

Så

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

- Horisontal asymptote $y=1$
- Vertikal asymptote i $x=1$ med $y(1^-) = -\infty$ og $y(1^+) = +\infty$
- Symmetrisk $y(x)$



Deretter

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2-1+1}{x^2-1} = \frac{d}{dx}\, 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

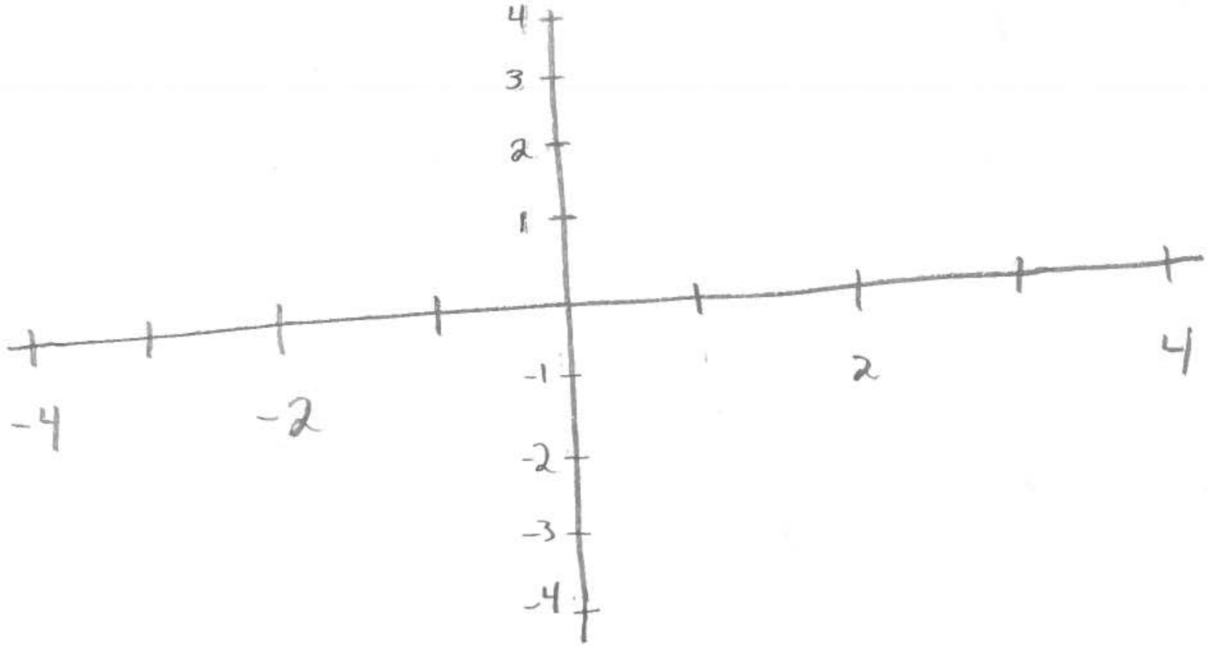
$$= -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'(a) = 0 \iff a = 0$$

$$y'(2) = -\frac{4}{3^2} = -\frac{4}{9} \approx -0.44$$

$$y'(4) = -\frac{8}{15^2} = -\frac{8}{225} \approx -0.04$$

x	$y(x)$
0	0
1	$\pm\infty$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
2	$4/3$
4	$16/15$



Forelesningsnotat 4.7

Kap 4.7

- Ex 1 i boka
- Representasjon av tall i PC $\left(5{,}4439 \cdot 10^{-17}\right)$
- Maskin epsilon
  - MatLab $2 \cdot 10^{-16}$
  - 32/64 bit presisjon
- $$\frac{7.0043}{1.4142-1.4100} = \underbrace{1.66}_{\text{ok}}\underbrace{77}\cdot 10^{3}$$

Akkumulert "avrundingsfeil" "maskin-ε-feil"

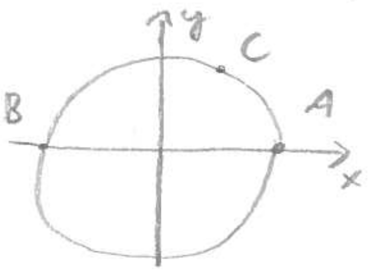
Forelesningsnotat kap 4.8 del 1

Kap 4.8

Mål

- Oversette: Tekstproblem → Matematikkoppgave i konteksten max/min-problemer
- Løse max/min-oppgaven (kap 4.4)
- Oversette: Matte-løsning → Tekst-løsning

EX: 4.8. Example 5



Boka s. 263

$$\left.\begin{aligned} V_{løp} &= 2\ m/s \\ V_{svøm} &= 1\ m/s \end{aligned}\right\} \text{Hvorfor ikke} \quad \begin{aligned} &2k \\ &1k \end{aligned}$$

$$\text{tid} = \frac{\text{avstand}}{\text{hastighet}} \qquad \frac{m}{m/s}$$

$A : (x, y) = (1, 0)$ enhet: 20m

$B :\quad (-1, 0)$

$C : (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

left blank

Forelesningsnotat kap 4.8 del 2

...

a_{AC} avstand A til C

a_{CB} — " — C til B

t_{AC} tid A til C

t_{CB} tid C til B

t_{TOT} tid totalt avhenger av? θ

$$t_{TOT} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{a_{AC}}{2} + \frac{a_{CB}}{1}$$

avh. av θ

(benevning "20 m")

$$a_{AC} = \theta$$

$$a_{CB} = |(\cos(\theta), \sin(\theta)) - (-1, 0)|$$

$$= |(\cos\theta + 1 \, , \, \sin\theta)|$$

$$= \sqrt{(\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

Finn θ der t_{TOT} er minimal

↓ ?

$$\boxed{t_{TOT}'(\theta_m) = 0}$$

$$t_{TOT}(\theta) = \frac{\theta}{2} + \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

$t_{TOT}'(\theta_m) = 0$ ved $\theta_m = \frac{\pi}{3}$

Nei! (Se Forelesning!)

Note to self: gjør en bra overrekking uten informasjonstap deretter se på eks.

NTS: Tavle