Forelesningsnotat   Kap 4.1

4.1 Intro

- papirbasert
- Related rates
  - Generisk: Gir forståelse for modellering av ingeniør-problemer
  - Spesifikt: Kan løse oppgaver om momentan vekst

Lær å lese eksempler

- Les en bit av gangen
- Regn fremover
- Løs oppg. på en annen måte også
- Tenk "hva er lurt" "hva er lov".

ex: 4.1.EX1

- Les til $s^2 = x^2 + 5^2$
- Regn fremover

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0} = ? \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} = 600 \text{ km/h}$$

$$s(t) = \sqrt{x^2+5^2}$$

$$s'(t) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$s'(t_0) = \frac{10}{\sqrt{10^2+5^2}} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} \quad \text{da } x(t_0) = x|_{t_0} = 10\text{km}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{125}} \cdot 600 \text{km/h}$$

- Se på eksempelet: Implisitt!

$$\frac{d}{dt} s^2 = \frac{d}{dt}(x^2+5^2)$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

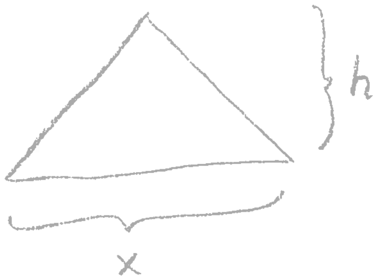
$$s(t_0) \cdot s'(t_0) = x(t_0) \cdot x'(t_0)$$

$$\sqrt{125} \cdot 600 = 10 \cdot x'(t_0) \quad \Rightarrow \quad x'(t_0) = \frac{10}{\sqrt{125}} \cdot 600$$

Kommentar til boka: $s(t_0)$! ~~nesten~~ like ille som å misbruke =-tegn

Tenk: er all boka gjør lurt?

H.4.1. Produkteksempel med benevning



Hvor mye forandrer arealet seg

Når bredden, x, er 4m og synker med 1m/s er høyden 0.17 km og øker med 3 km/t

Versjon 1: Oversett alt til SI først

Versjon 2: Skriv benevning

løsning

$$A = \frac{1}{2} h \cdot x \quad , \quad A(t) = \frac{1}{2} h(t)\, x(t)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \cdot x$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t_0} = \frac{1}{2} \cdot 0.17\,km \cdot \frac{1m}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3km}{time} \cdot 4m$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(0.17 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{km \cdot m}{s} + \frac{3}{3600} \cdot 4 \cdot \frac{km \cdot m}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(0.17 + \frac{1}{300}\right) \frac{km \cdot m}{s}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(0.17 + \frac{0.01}{3}\right) 10^3 \cdot \frac{m^2}{s}$$

Forventet benevning $\frac{dA}{dt}$ er $\frac{m^2}{s}$, $\frac{km^2}{s}$, $\frac{km^2}{t}$, Forelesningsnotater kap 4.1 del 2

4.1.EX4

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ for alle t

Vi vet:

$h(t_0) = 4m$ $h_{max} = 5m$

$r(t_0) = ?\,m$ $r_{max} = 2m$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t_0} = -\frac{1}{12}\frac{m^3}{min} = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{60}\frac{m^3}{s}.$$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_0} = ?$ vil vi ha

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t_0} = ?$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\cdot 2r\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\pi}{3}r^2\frac{dh}{dt}$$

2 ukjente
won't work

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r(h)^2\cdot h \quad , r(h) = \frac{2}{5}h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{2^2}{5^2}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\frac{2^2}{5^2}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

1 ukjent

$t = t_0$:

$$-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{60} = \frac{4\pi}{25}\cdot 4^2\cdot\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_0}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_0} = -\frac{25}{4^3\cdot 12\cdot 60\pi}\ m/s$$

ser greit ut

4.1. Metode (oppsummering)

- Skriv opp ting du vet & ikke vet
- Kall "tidspunktet" noe (t_0)
- Implisitt derivasjon
  - Husk kjerneregel

4.1 Kommentar til boka

- Gode eksempler
- Bruker ikke "t_0"
- Utydelige med benevning

4.1 Bonus eksempel

$x = 4\cos t$

$y = t^2 + 1$

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad r \geq 0$

Finn $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$

Kapittel 4.2

Mål: Finne nullpunkt numerisk
og lære numerikk-tankegang

Binærsøk

Idé: Intermediate value theorem

Problem: Finn x_0 med $f(x_0)=0$ generisk

ex

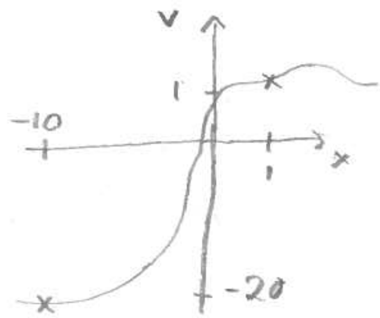
La $f(x)=x^2$, $g(x)=-e^x$

finn x_0 med $f'(x_0)=g(x_0)$

$f'(x)=2x$ så $2x_0=-e^{x_0}$

$2x_0+e^{x_0}=0$

$v(x)=2x+e^x$, $v(x_0)=0$



$v(0)=2\cdot 0+e^0 = 1$

$v(1)=2+e^1 \approx 4,7$

$v(-10)=-20+e^{-10}\approx -20$

$v(x)$ kontinuerlig, så $\exists x_0 \in [-10,1]$ med $v(x_0)=0$.

$v(-1) = -2+e^{-1} \approx -1,6$

$v(-0,5) = -1+e^{-0,5} \approx -0.393$

$v(-0,2) = \quad \approx 0.419$

$v(-0.3) = \quad \approx 0.141$

$v(-0.4) = \quad \approx -0.130$

...

Newton's Metode

Finn r slik at $f(r) = 0$

(funksjonen $f(x)$ er gitt)

- Startpunkt x_0
- Regn ut $f'(x_0)$ og følg tangenten ned til null $(T(x_1) = 0)$.
- Gjenta

se p 223

Utregning

$\Delta y = -f(x_0) \qquad \Delta x = x_1 - x_0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0) \qquad \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ex

før: $V(x)$

$f(x) = e^x + 2x$

$f'(x) = e^x + 2$

$x_0 = 0$

$x_0 = ?$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{f(-\frac{1}{3})}{f'(-\frac{1}{3})} = \frac{-1}{3} - \frac{e^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}}{e^{-1/3} + 2}$$

$x_2 \approx -0.352$

$f(x_0) \approx 1$

$f(x_1) \approx 0.05$

$f(x_2) \approx 0.00012$

Forelesningsnotater kap 4.2 del 2

Generell formulering (Newton's)

x_0 gitt / gjettet $f(x)$ gitt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

small

not so small

$$x_n \xrightarrow{n \to \infty} r \quad f(r) = 0 \quad {}^{*)}$$

*) Jeg lover ingenting!

Pros - Cons - Fixes

+ Konvergerer raskt

i forhold til binærsøk

÷ Trenger deriverbar $f(x)$

÷ Kan "ikke-konvergere"

$f'(x_5) > f(x_5)$

$f(x) = \sin(200x)$

fix Kan analysere feilstørrelsen

fix Kan kombineres med Binær

thm 1 & 2 i boka

Analyse

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Hvis $|g(x) - g(y)| < K|x-y|$

med $0 < K < 1$ så

vil x_n konvergere.

Hvorfor?

- Se thm 2 i boka

Anvendt Newton m/Calc

$$f(x) = e^{3x} - 7$$

- Se regneark
- Bruk "Ans" på kalkulator
  - Sjekk $f(x_n)$ etterpå!

I) 0 ↵

II) $\text{Ans} - \dfrac{f(\text{Ans})}{f'(\text{Ans})}$ ↵ ↵ ↵ ↵ …

III) Stabilisert eller # ledd

IV) Sjekk $f(\text{Ans})$