Forelesningsnotat 2.7 – 2.11 del 1

2 side = 45 min.

Først

1) ex fra 2.6 (se notatene)

2) grønne lapper

Kap 2.7

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \approx \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=a}$$

H. 2.7. Fortjeneste

Modell:

Pris: $P(x) = 100 - \frac{x}{2}$ eksklusivt produkt gir høyere pris.

Kvantitet: $Q(x) = x$

Kostnad $C(x) = 20$ produksjonskost

a) Hvor mange ville en ingeniør prod/solgt.

b) —"— økonom —"—.

a) $P(x) = C(x)$ er nedre grensen for hvilken pris vi kan ta

løse
$$\begin{cases} P(a) = C(a) \\ 100 - \frac{a}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow 80 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 160$$

svar: Ingeniøren prod/selger 160 enheter.

b) $\Delta I = 0$ hvor I er inntekten (netto)

$$I = p \cdot x - C \cdot x$$

matematikk/ $I = \left(100 - \frac{x}{2}\right)x - 20x = 80x - \frac{x^2}{2}$

$$\Delta I = 0$$
$$dI = 0$$
$$\frac{dI}{dx} = 0$$
$$\left.\frac{dI}{dx}\right|_{x=A} = 0$$

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}\left(80x - \frac{x^2}{2}\right) = 80 - x$$

$$\left.\frac{dI}{dx}\right|_{x=A} = 80 - A = 0 \Rightarrow A = 80$$

Økonomen produserer/selger 80 stk.

Merk

Ingeniøren tjener $I(160) = 80 \cdot 160 - \frac{160^2}{2} = 3200$

Økonomen tjener $I(80) = 80 \cdot 80 - \frac{80^2}{2} = 4800$

Husk?

Merk: Kall $y = x = Q(x)$, la vil

$p = 100 - \frac{x}{2} = 100 - \frac{y}{2}$ $\qquad 100 - p = \frac{y}{2}$

$y = 200 - 2p$

Pris Elastisitet 2.7. Ex 8 (vanskelig eksempel)

$$-\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dp}{p}} \Leftarrow -\frac{\text{\% change in quantity}}{\text{\% change in price}} \Rightarrow -\frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$$

I vårt eksempel: elast $= -\frac{p}{200-2p} \cdot (-2) = \frac{p}{100-p}$

Forelesningsnotat kap 2.7 – 2.11 del 2

Legg ut notater

2sider: 45min

1.2.8. maksverdi-eksempel

Finn største verdien på $[0,3]$ av $x^3 - x + 2 = f(x)$

Kandidater: $f'(a) = 0 \Rightarrow 3a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

endepunkter $\Rightarrow$ $a = 0$ eller $a = 3$

Sjekk: $f(\sqrt{\tfrac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + 2 = 2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3} \approx 1.6$

$-\sqrt{\frac{1}{3}} \notin [0,3]$

$f(0) = 2$

$f(3) = 27 - 3 + 2 = 26$

Svar: $f(x)$ max på $[0,3]$ ved $x = 26$.

Teorem – Bevis – Generalisering – Abstraksjon

· Trener Intellektuell (gjør vondt)

(1.4. Thm 9) : Intermediate Value thm

2.8. Thm 14 : Maksverdi-teoremet

2.8. Thm 15 : Rolle's horisontale tangent

2.8. Thm 11 : Mean-Value (gjennomsnittsøkning = derivert i et punkt)

2.8. Thm 16 : Generalisert M.V.T.

Intuitiv og logisk versjon av utsagn og bevis.

I.V.T.

I: alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$ oppnåes.

L: $f(x)$ kont. på $[a,b]$,
$\Rightarrow \forall s \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \in [a,b] : f(c) = s$

Proof

L: Left out.

I: tegne graf uten å løfte hånden $\Rightarrow$ alle verdier treffes.

2.8. Thm 14

Anta f def on (a,b) med max på c : $a<c<b$.

$f'(c)$ eksisterer $\Rightarrow f'(c)=0$

Intuitivt

Den derivert i max-punkter må være 0 (hvis den finnes)

Proof

Intuitive : Var $f'(c)>0$ ville $f(c+dx) > f(c)$
litt til høyre ville vært større.
Tilsvarende for $f'(c)<0$ til venstre større.

Logic :

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{da } f(c+h)-f(c) \leq 0$$

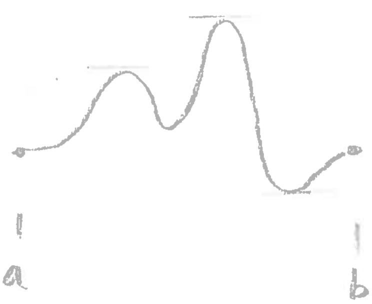
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

da teller & nevner begge ≤ 0
så brøken ≥ 0

$\Rightarrow f'(c)=0$.

2.8. Thm 15 Rolle's

"Hvis du ruller en ball over en fjelltopp, så går den rett frem ved et tidspunkt"



$g(a)=g(b) \Rightarrow$

$\exists\, c \in (a,b) : g'(c)=0$

Forelesningsnotat 2.7-2.11 del 3

Proof

1. f kont på $[a,b] \Rightarrow$ finnes maxverdi på $x=c$, $c \in [a,b]$ $\Rightarrow f'(c)=0$

skippet: Noen ekstra detaljer om $c=a$ eller $c=b$, se boka

2.8. Thm 11 M.V.T.

- Se p 142 for bilde.

Anta f kont. på $[a,b]$ deriverbar på (a,b)

Så finnes $(\exists)$ $c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bevis

del 1. Intuitiv, kan gjøres logisk.

Flytt $f(x)$ s.a. $a=0$, $b=1$, må vise

$\underbrace{}_{\text{og } f(a)=0}$

$$\boxed{\exists c \in (0,1) : f'(c) = \frac{f(1)-0}{1} = f(1)}$$

del 2

La $g(x) = f(x) - x f(1)$

$g(0)=0$, $g(1)=0 \Rightarrow \exists c : g'(c)=0$

$\Rightarrow f'(c) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=c} g(x) - x f(1) = 0 - f(1)$

Dvs $\exists c : f'(c) = f(1)$

$\square$

H. 2.8. Thm 14. Corollary

f continuous on $[a,b]$, then there are only the following candidates for a local/global maximum/minimum $c \in [a,b]$

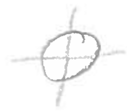
- c with $f'(c)$ undefined
- c with $f'(c) = 0$
- $c = a$ and $c = b$

Forelesningsnotat 2.7-2.11 del 4

kap 2.9 Implisitt derivasjon

Vi kan derivere, og finne tangent, til $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$

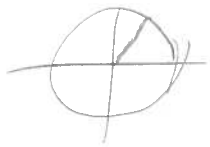
Men hva med $x^2 + y^2 = 4$?



Implisitt med hensyn på en ny variabel

Anta vi beveger oss på sirkel $x^2+y^2=4$ og vi er interessert i $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{d}{dt} 4$$



$$\Downarrow$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Ved $t=0$, $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ er $\dot{y} = -1$ hva er $\underset{(t=0)}{\dot{x}}$?

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} \qquad \dot{x}\Big|_{t=0} = +\sqrt{3}$$

Implisitt mhp en av variablene

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\Downarrow$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Finn tangenten i $(1,\sqrt{3})$

$$y - y_0 = m(x-x_0)$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

2.9. Ex 4

Tangent to $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ at $(-2, 1)$

- Se boka for L.F.

Infinitesimaler

ex $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x \, dx$

ex $y' = yx \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x\,dx$

kap 2.10 Antiderivert

- Gitt $f(x)$, finn $F(x)$ med $f(x) = F'(x)$.
- Bruk "tabellen" for derivasjon motsatt vei
- $F(x)$ unik opp til konstant $+ C$

  $(x^2+1 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x, \quad x^2 - 3 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x)$
- $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x) + C\right]_a^b = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x$ (se kap. 4)

H. 2.10, prøve seg frem

$$\int x \sin x \, dx = ?$$

$x \cos x \xrightarrow{'} -x \sin x + \cos x$

$-x \cos x \xrightarrow{'} x \sin x - \cos x$

$-x \cos x + \sin x \xrightarrow{'} x \sin x - \cos x + \cos x = x \sin x$

$$\Rightarrow \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Forelesningsnotater 2.7–2.11 del 5

H. Supereksempel Tyngdekraft

La $y(t)$ være høyden (1-dimensjonalt)

$y_0 = y(0)$ er starthøyden

$V_0 = v(0) = y'(0)$ er start-hastighet

$a = -g$ konstant tyngdeakselerasjon nedover

$y''(t) = -g$ hele tiden. Finn $y(t)$

Matematikk

$$y(t) = \int y'(t)\,dt \qquad y'(t) = \int y''(t)\,dt \qquad \left[y(t) = \iint y''(t)\,dt\,dt\right]$$

- Ikke bruk samme "t" inni og utenfor $\int$-tegnet!

estemte integral

$$y'(t) = \int_{s=0}^{s=t} -g\,ds = \Big[-gs\Big]_0^t = -gt - (-g\cdot 0) = -gt$$

$$\approx \sum_{s=0}^{s=t} g\,\Delta s = g\sum_{s=0}^{s=t}\Delta s = g\cdot t$$

$$y(t) = \int_{s=0}^{s=t} y'(s)\,ds = \int_{s=0}^{s=t} -gs = \left[-g\cdot\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = -g\,\frac{t^2}{2}$$

Vi gjør det samme igjen, bare riktig på venstresiden

$$y''(t) = -g$$

$$\int_0^t y''(s)\,ds = \int_0^t -g\,ds \Rightarrow$$

$$\Big[y'(s)\Big]_{s=0}^t = \Big[-gs\Big]_0^t$$

$$y'(t) - y'(0) = -gt$$

$$y'(t) = -gt + V_0$$

$$\int_0^t y'(s)\,ds = \int_0^t -gs + V_0\,ds$$

$$\Big[y(s)\Big]_0^t = \left[-\frac{1}{2}gs^2 + V_0 s\right]_0^t$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

$$y(t) = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Samme, med ubestemt integrasjon

$y''(t) = -g$

$y'(t) = \int -g \, dt = -gt + C$

$y(t) = \int y'(t) = \int -gt + C \, dt = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$

Finn C og D — 5 min

$y(0) = D = y_0$

$y'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \cdots = (-gt + C)\Big|_{t=0} = C = v_0$

s. a.

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$

Samme, oppgaven skrevet som difflikning

$y''(t) = -g$ (for alle t)

$y'(0) = v_0$

$y(0) = y_0$

Husk

Integraler: deriver og sjekk

Difflikn.: sett inn og sjekk / tilpass

Forelesningsnotater kap 2.7–2.11 del 6

Innsikt

- Foil kretsteknikk Okt_04

  i strøm (ampere)

  v spenning (volt)

- Modell for Kapasitor

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \quad \text{hvor } C \text{ konst.}$$

- Hva kan vi si som matematikere?

1) Stabil V over kapasitor $\Rightarrow$ ingen strøm (åpen krets)

II)
$$\int_{t=t_0}^{T} \frac{dV}{dt}\,dt = \int_{t=t_0}^{T} \frac{1}{C}\, i(t)\,dt$$

$$V(T) - V(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t=t_0}^{T} i(t)\,dt$$

III) Energy in joule is E

$$\Delta E = V(t)\cdot i(t)\cdot \Delta t$$

$$E = \int_{t=0}^{T} v\cdot i\cdot dt = \int_{t=0}^{T} v\cdot C\cdot \frac{dv}{dt}\cdot dt$$

$$E = C\cdot\int_{t=0}^{T} v\cdot dv = C\cdot\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{t=0}^{T} = \frac{C}{2}\left(V(T)^2 - V(0)^2\right)$$

Innsikt

$$L\, i''(t) + R\, i'(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = 0$$ strømkrets

$$m\, y''(t) + c\, y'(t) + k\, y(t) = 0$$ fjær

Typical

y or i

$$e^{-t} \cdot \cos(5t)$$