Forelesningsnotater Kap 2.1 - 2.6 del 1

Intro

slides

Ta god tid

40 min

Derivasjon som teknikk

- Liste m/ regler på hjemmesida
- Liste m/ kjente deriverte

2.3. EX 3 (p111)

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)(x^3+4)$$

a) gange ut

b) produktregel

SPØR: Hvor mange hadde fått til denne selv

2.3. EX 7 (p113)

a) $\frac{1}{x^2+1} = f(x)$

a1) gavhet

a2) chain rule

b) $\frac{1}{t+\frac{1}{t}} = f(t)$

chain rule; using t

2.3. EX 9c (p114)

$$f(\theta) = \frac{a+b\theta}{m+n\theta}$$

$a, b, m, n \in \mathbb{R}$ (konstante)

2.3. EX 5a (p118) (annen utregning)

$$f(t) = \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+2}} = (t^2+1)(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{d}{dt}(t^2+1)\cdot(t^2+2)^{-\frac{1}{2}} + (t^2+1)\cdot\frac{d}{dt}(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2t\cdot(t^2+2)^{-\frac{1}{2}} + (t^2+1)\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{d}{dt}(t^2+2)$$

$$= 2t\cdot(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\left(1+-\frac{1}{2}(t^2+1)(t^2+2)^{-1}\cdot 1\right)$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{t^2+2}}\left(1-\frac{\frac{1}{2}(t^2+1)}{t^2+2}\right)$$

2.5. EX3

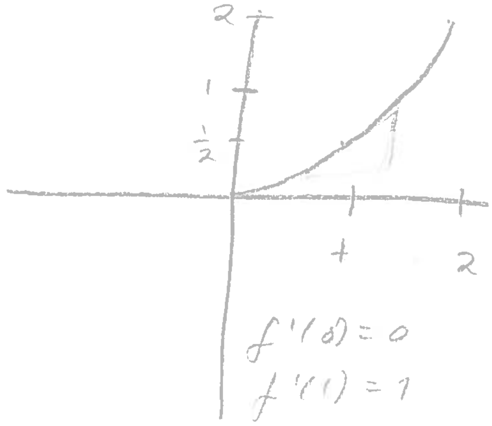
$f(t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$

Deriver begge.

Derivasjon som Tangent

Se MathLet

Ved å tegne deriver $\frac{1}{2}x^2$



$f'(0) = 0$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 2$

deriver $|x|$

2.1. EX4

(og 2.2.EX4)

f ikke def i 0

2.1. EX7a

Find tangent to $y = \sqrt{x}$ at $(4,2)$

Ans: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$

Forelesningsnotater kap 2 del 2

20m
Min. døme
dag 1

Derivert som Grenseverdi

2.2. Def 4

Den deriverte av f kalles f' og er definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f'(x)$ er kun definert der denne grensen eksisterer (og er endelig).

H.2.2. To måter å derivere på

Finn $f'(2) = f'(x)\big|_{x=2}$ når $f(x) = x^2 + 1$

Lett: $f'(x) = 2x$ $\quad f'(x)\big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4$

Vanskelig:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2+1)}{h}$$

$$= \lim \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 4 - 1}{h} = \lim 4 + h = 4$$

Merk: Kan ikke sette inn først, og så derivere

H.2.2. Deriverbar?

$f(x) = |x|$ finn $f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \text{ikke def.}$$

$\Rightarrow$ Det er ikke lov å skrive $f'(0)$, da denne ikke finnes.

20 min

H.2.2 ex. Når vi trenger grenseverdien

La $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

La $g(x) = f(x) \cdot x = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Begge er kontinuerlige (inkl 0)

Begge kan deriveres for $x > 0$, men hva med $x = 0$?

IGNORE

$$\left(\begin{array}{l} g'(x) = f'(x)\, x + f(x) \\ f'(x) = \dfrac{g'(x) - f(x)}{x} \quad \text{except for } x = 0 \end{array} \right)$$

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} =$ I.D.f. $\qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$

Forelesningsnotater kap 2 del 3

10min

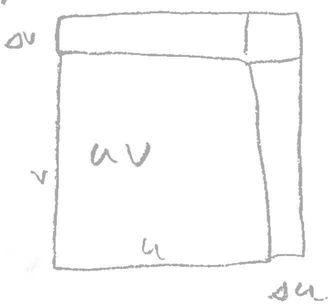
Hvor kommer Tabellen & Regnereglene fra?

Boka p. 109 – linearitet
p. 100 – def. of f'
p. 69 – rules for limits

H.2.3. Produktregelen

Boka: se p111 vs. p69

Grafisk



$$\Delta(uv) = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du + \cancel{du\,dv}$$ → liten

$$\frac{d}{dx} uv = \frac{d}{dx} u \cdot v + u \cdot \frac{d}{dx} v$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

Paradoks (fra slides)

$$\frac{d}{dx} \underbrace{(x + x + \dots + x)}_{x \text{ ganger}} = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{x \text{ ganger}} + \underset{\uparrow}{x} = 2x$$

får 1 "x" til
når man øker x.

H.2.3. x^N derivert

$$f(x) = x^N \qquad N \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_1$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^N - x^N}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^N + Nx^{N-1}h + \frac{N \cdot (N-1)}{2} x^{N-2} h^2 + \dots + h^N - x^N}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} N x^{N-1} + \frac{N(N-1)}{2} x^{N-2} h + \dots + h^{N-1} = N x^{N-1}$$

H.2.4 Kjerneregel Tenk: $(x^2+1)^4$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dg} f(g) \Big|_{g = g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

- Beviset står i boka (jeg ta det ikke med)

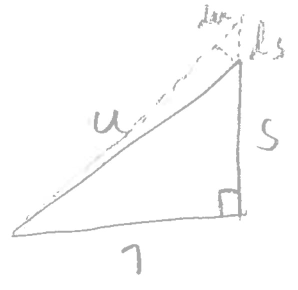
EX $f(g) = g^4 \quad f(g(x)) = (x^2+1)^4 \quad \boxed{\neq f(x)}$

$g(x) = x^2 + 1$

H.2.4. Forklaring på $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$

- Chain Rule Mathlet ($\sin 2x$, $\sin x^2$)

?)



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \frac{du}{dt} = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \Bigg|_{\substack{s=1 \\ u=\sqrt{2}}} \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \frac{du}{u}$$

$u^2 = s^2 + 1$

$s = \sqrt{u^2-1} \qquad \frac{ds}{du} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}$

$u\,du = s\,ds$

Forelesningsnotater kap 2 del 4 10m

H.2.4. Kjerneregel forts..

Ex $\frac{d}{dx}\sin 2x$ } bruk $f(g(x))$

Ex $\frac{d}{dt}\sin(t^2)$ ← Bruk

$y = \sin t^2$
$u = t^2$ $y = \sin u$ $\boxed{y(t) = \sin u}$
$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}$

2.5. Thm 9

Derivasjon av sinus

$\frac{d}{dx}\sin(x)$ følg boka

2.5. Thm 10

$\frac{d}{dx}\cos = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2.6 Høyere ordens derivasjon: Algoritme

2.6. exerc 2

$$y = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1x^{-2} \qquad y'' = 2 - 2x^{-3}$$

2.6. EX4

$$y = (1+x)^{-1} \quad \text{find } y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} y$$

WHY: Taylorrekker

$$y' = -1(1+x)^{-2}$$

$$y'' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

looks like: $y^{(n)} = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1}$

Check $n=1$: ok

Check next-step:

$$\frac{d}{dx} y^n = (-1)^n n! (-1)(n+1)(1+x)^{-n-2}$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1)! (1+x)^{-(n+1)-1} = y^{(n+1)}$$

Induction.

Forelesningsnotater kap 2 del 5

2.6. Høyere ordens derivasjon: Forståelse/Intuisjon

Parabelbane: $y(t) = kt^2 + bt + c$

$y''(t) = 2k$

$F = ma = m\ddot{y} = m \cdot 2k$

$\Rightarrow$ F er konstant i parabel-bevegelser.

Grafene

- Se Mathlet igjen

Parabeltilpasning

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot x + y''(x_0) \cdot x^2$$

Mathlet

derivert $>, <, = 0$

dobbeltderivert $>, <, = 0$