

Kap 4.9 Linear Approximations

Mål

- Forstå linearisering
- Forberedelse på Taylorpolynomer

Linearisering - Derivasjon

brukt for

$$y = f(x)$$

$$\left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x=a} = \frac{L(x) - L(a)}{x - a} \approx \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = f'(a)$$

$$L(a) = f(a)$$

$$\frac{L(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$L(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Linearisering - matching

Gitt  $f(x) = e^x$  finn polynom av grad 1 som "likner mest" på  $f(x)$  rundt  $x = 0$ .

løsn

$$p(x) = c_1 + c_2 \cdot x$$

$$p(0) = f(0) \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = e^0 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$p'(0) = f'(0) \Rightarrow c_2 \cdot 1 = e^x \Big|_{x=0} \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\text{Så } p(x) = 1 + x$$

## Teorem om feilen

4.9. Thm 11

$f(x)$  kan deriveres 2 ganger

$L(x) \approx f(x)$  er lineariseringen

fra forrige eksempel, rundt  $x=a$ .

$E(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - L(x)$  kalles "feilen"

Da finnes  $s \in (x, a)$  eller  $(a, x)$

slik at

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2} (x-a)^2$$

## Betydning

$$|E(x)| \leq \frac{|x-a|^2}{2} \cdot M$$

hvor  $M = \max_s f''(s)$

## Ref. forrige eksempel

$$f(x) = e^x, \quad p(x) = L(x) = 1 + x, \quad a = 0$$

Se på feilen i  $x=1$ :

$$E(1) = \frac{f''(s)}{2} (1-0)^2 = \frac{e^s}{2} \quad \text{for}$$

en eller annen  $s \in (0, 1)$  i

følge teoremet

## Sjekk

$$f(1) - L(1) = e^1 - 2 = 0.71828\dots$$

For  $s = 0.36225\dots$  så er  $\frac{e^s}{2} = 0.71828\dots$

EX: Oppgave 4.9.28 write!

$$\text{If } f(2) = 4, f'(2) = -1, \frac{1}{2x} \leq f''(x) \leq \frac{1}{x} \text{ for } x > 0$$

find the best approximation for  
contains  $f(3)$ .

$$L(x) = p_1(x) = c_0 + c_1 x \text{ rundt } a = 2$$

$$f(2) = p_1(2)$$

$$4 = c_0 + c_1 \cdot 2$$

$$f'(2) = p_1'(2)$$

$$-1 = c_1$$

$$c_1 = -1$$

$$c_0 = 4 - 2c_1 = 4 + 2$$

$$c_0 = 6$$

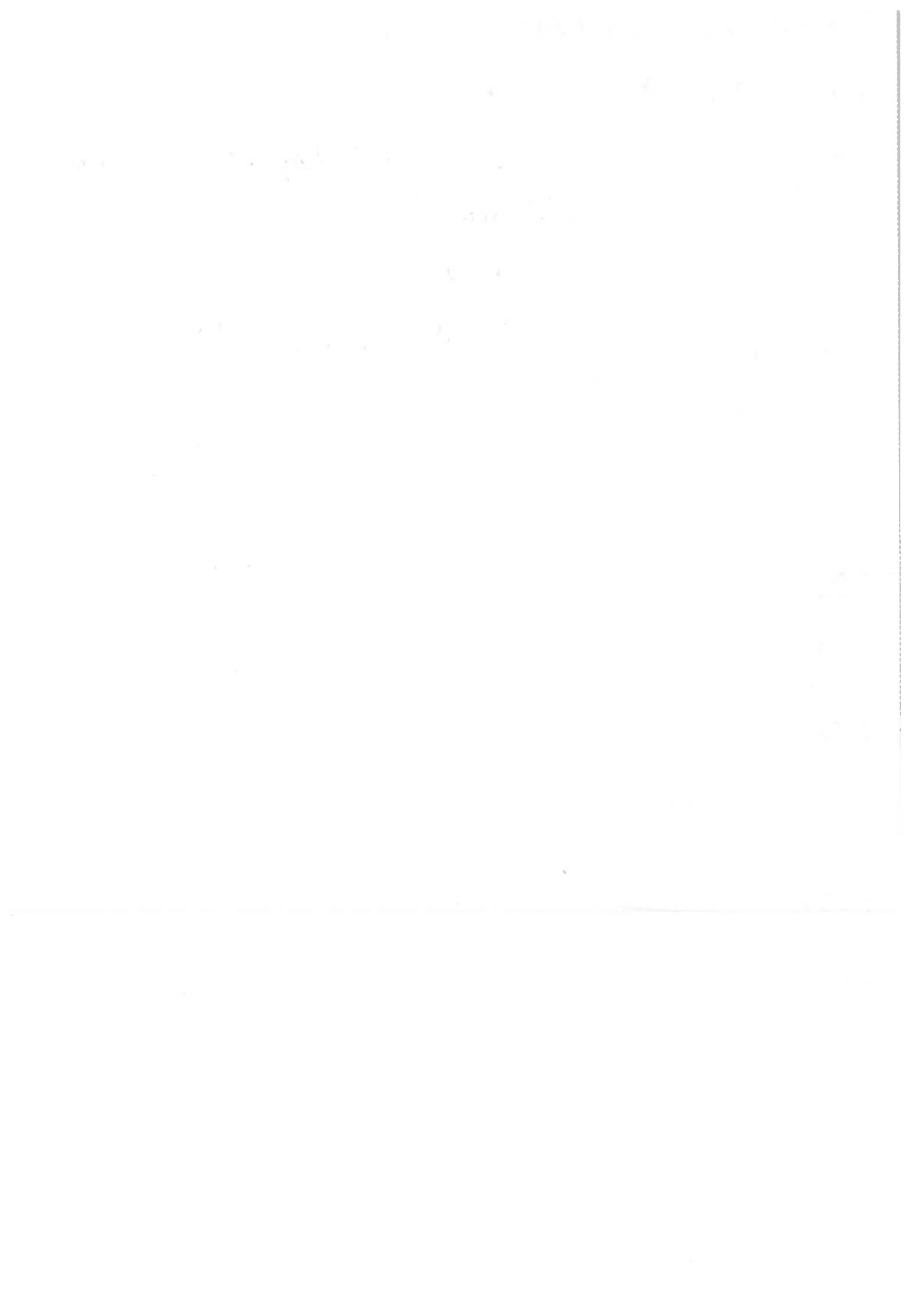
$$p_1(x) = 6 - x$$

$$E(x) = f(x) - L(x) = \frac{f''(s)}{2} (x-2)^2, s \in (2, x)$$

$$f(3) \approx p_1(3) = 6 - 3 = 3$$

$$|E(3)| \leq \frac{\max_{s \in (2,3)} |f''(s)|}{2} (3-2)^2$$

$$|E(3)| \leq \frac{1}{2} \max_{s \in (2,3)} \left| \frac{1}{s} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}$$



Kap. 4.10 Taylor Polynomials

Mål

- Utvide linearisering til høyere grads polynomer
- Bruke Taylor-polynomer til å forstå/løse grenseverdier
- Få innsikt i andre bruksområder

(Hvorfor?)

Antakelse

• Vi er interessert i  $x=0$  dvs  $a=0$

ex

- Finn linearisering av  $f(x) = \sin(x)$  ved  $a = 3$
- Finn linearisering av  $g(x) = \sin(x+3)$  ved  $a = 0$  ( $a+3=3$ )

## Taylorpolynom

Definisjon: Taylorpolynomet av grad  $n$  om  $x=0$  til  $f(x)$  er polynomet av grad  $n$ ,  $p_n(x)$ , med verdien,  $p_n(0)$ , og alle de  $n$  deriverte lik funksjonen sin verdi og deriverte i 0.

$$p_n(0) = f(0)$$

Med symboler:

Taylor  $p_n(x)$  til  $f(x)$  om  $a=0$

$$f(0) = p_n(0)$$

$$f'(0) = p_n'(0)$$

$$f''(0) = p_n''(0)$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

## Utregning

$$\text{La } p_n(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 \dots + c_n x^n$$

$$\text{Da } p_n(0) = c_0 = f(0)$$

$$p_n'(0) = 1 \cdot c_1 = f'(0)$$

$$p_n''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2 = f''(0)$$

$$p_n'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c_3 = f'''(0)$$

For Nitat M1 kap 4.10 del 2

EX:  $e^x$

$f(x) = e^x$  finn  $p_2(x)$  ved  $x=0$

$$p_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$$

---

(Utregning)

---

Fra før  $L(x) = p_1(x) = 1 + x$

Tegn OPP

Vis animasjon av  $\frac{d}{dx}$ ,  $(\frac{d}{dx})^2$ .

Ex (Oppg 4.10.10++)  
 Bruk tredjegrads Taylor rundt  $x=0$   
 til å finne  $\sqrt{61}$

Løsning

$$f(x) = \sqrt{x+64} \quad f(0) = \sqrt{64} = 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x+64)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x+64)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = +\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} (x+64)^{-\frac{5}{2}}$$

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$P'(0) = c_1 \quad P''(0) = 2c_2 \quad P'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot c_3$$

$$c_0 = f(0) = 8$$

$$c_1 = f'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{16}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{64}^3} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8^3} = -8^{-4}$$

$$c_3 = \frac{1}{6} f'''(0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{64}^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 8^{-5} = \frac{1}{2} \cdot 8^{-6}$$

$$P_3(x) = 8 + \frac{1}{16} x - 8^{-4} x^2 + \frac{1}{2} \cdot 8^{-6} x^3$$

$$\sqrt{61} \approx P_3(-3) = 8 + \frac{-3}{16} - \frac{9}{8^4} + \frac{-27}{2 \cdot 8^6}$$

$$= 7.81025123596$$

W.A. Plots  
 Oppg. P2(x)

7.81024968...



Generelle Taylorpolynom med generell  $x=a$

$f(x)$  uspesifisert (smooth) funksjon

$$P_n(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n$$

$$C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Generell a : flytt  $x \rightarrow x-a$ ,  $0 \rightarrow a$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

## Taylor's feilformel (Thm 12)

$f(x) \approx p_n(x)$  ved  $x=a$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \begin{array}{l} \text{for en} \\ s \in (x, a) \\ s \in (a, x) \end{array}$$

Ex:

$$f(x) = e^x$$

$$a = 0$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$E_3(x) = \frac{f^4(s)}{4!} x^4 \quad f^4(s) = e^s$$

Se på intervaller  $[0, 1]$  og finn en øvre skranke for feilen.

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \left| \max_{s \in [0,1]} f^4(s) \right| \cdot \left| \max_{x \in [0,1]} x^4 \right|$$

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{24} \left| \max_{s \in [0,1]} e^s \right| \cdot 1^4$$

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot e^1 < \frac{1}{24} \cdot 3 = \frac{1}{8} = 1,25$$

Konklusjon

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad \text{på } [0, 1]$$

med error/feil mindre enn 1,25.

## Kapittel 5 Integrasjon

Introoppgave

Finn  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

### Antiderivasjon

Finn ut hvilken funksjon vi deriverte

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$x^2$	$2x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

←

### Integrasjon

Klipp ut arealet under grafen og vei på vekt. Bruk homogent papir!

## Kap 5.1

Mål:

- Lære  $\Sigma$ -notasjon for summer

Hvorfor?

- Resten av kapitlet.

$$\frac{ex}{1+2+3+4+5} = \sum_{i=1}^5 i = \sum_{k=1}^5 k$$

$$1+4+9+16 = \sum_{i=1}^4 i^2$$

$$p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$
$$= \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

Summer formler

Observer  $\sum_{n=1}^M (?) = n^2$

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$

$$\sum_{n=1}^M 2n - 1 = M^2 \quad (1)$$

Sjekk (1)

M=0: v.s. =  
H.S. =

M=1: v.s. =  
H.S. =

M=2: v.s. =

$$\sum_{n=1}^M 2n - 1 = \sum_{n=1}^M 2n - \sum_{n=1}^M 1 = 2 \sum_{n=1}^M n - \sum_{n=1}^M 1 = 2 \cdot \alpha - M$$

def  $\alpha$

$$2 \cdot \alpha - M = M^2$$

$$\alpha = \frac{M^2 + M}{2} = \frac{M(M+1)}{2}$$

se side  
292  
Thm 1



Kap 5.2

Mål:

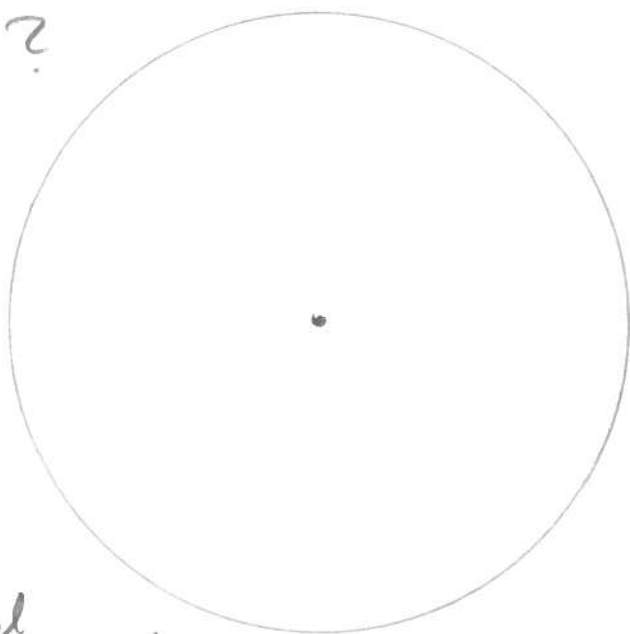
- Forstå hvordan areal kan beregnes ved å "tegne firkanter" i stedet for å klippe-ut-og-veie
- Kunne regne ut enkle arealer på denne måten

EX: Hva er  $\pi$ ?

Før:

Sammenlikn vekt med kvadrat med sider 4 cm

$$\pi = \frac{\text{Vekt Sirkel}}{\text{Vekt Areal}}$$



$$r = 4 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2$$

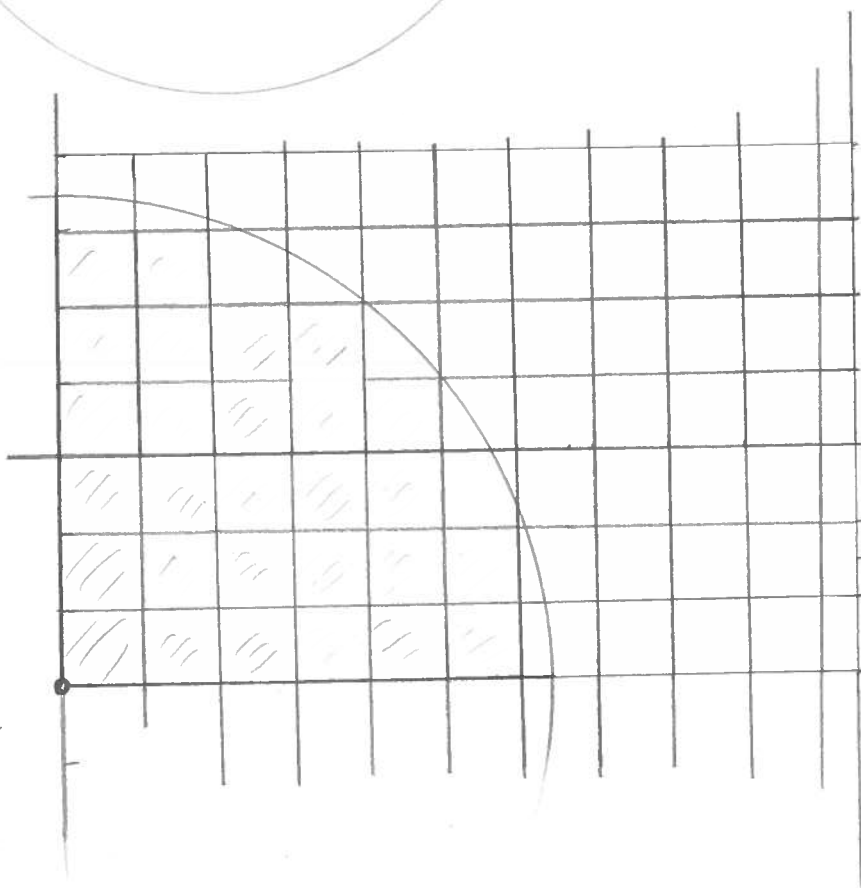
Nå

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot 6,4^2 = 10,24\pi$$

$$28 \text{ Indre} \Rightarrow \pi > 2,8$$

$$37 \text{ Ytre} \Rightarrow \pi < 3,7$$

$$\text{Gjennomsnitt } \pi \approx 3,25$$



left blank  
almost

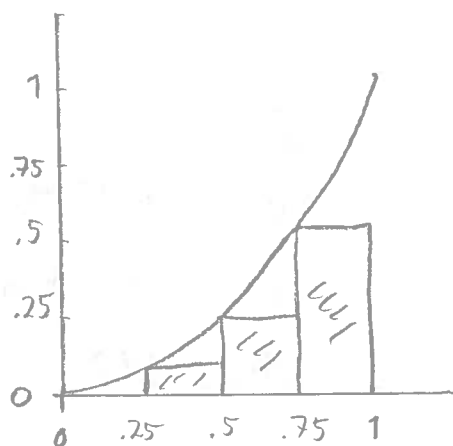


Arealet under grafen til en matematisk funksjon

\* Kommer til å bli  
 $\int_a^b f(x) dx$  senere

På den tungvinte måten, som er den eneste metoden vi har nå, finn

$L(f, 0 \parallel\parallel\parallel 1)_h$  for  $f(x) = x^2$



$\parallel\parallel$  er  $0 \parallel\parallel\parallel 1$  med  $h=0.25$

$0 \parallel\parallel\parallel 1$   
 $h$  betyr "del opp tallinjen fra 0 til 1 i biter med tykkelse  $h$ "

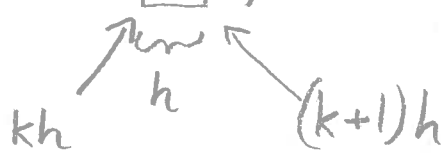
Dette er eksempel på en partisjon  $P$ .

$$0 < h < 2h < 3h < \dots < (N-1)h < Nh = 1$$

Det blir  $N$  biter ex: over er det  $N=4$

EX: "Integrer  $x^2$  fra 0 til 1 med Lower Riemann Sum"

$$L(x^2, 0||1)_h = \sum_{k=0}^{N-1} \text{areal av } \left. \begin{array}{c} \text{rectangle} \\ \left. \vphantom{\text{rectangle}} \right\} (kh)^2 \end{array} \right\} (kh)^2$$



$$= \sum_{k=0}^{N-1} (kh)^2 \cdot h$$

$$= h^3 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = h^3 \frac{(N-1) \cdot N \cdot (2N-1)}{6}$$

↑ side 292

$$L(x^2, 0||1)_h = \frac{h^N - h}{6} \cdot Nh \cdot (2Nh - h) \quad Nh = 1$$

$$L(x^2, 0||1)_h = \frac{1-h}{6} \cdot 1 \cdot (2-h) = \frac{1}{6} (2 - 3h + h^2)$$

Vendelig nøye  $h \rightarrow 0$

Boka: ||P||  $\rightarrow 0$

$$\int_0^1 x^2 dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} L(x^2, 0||1)_h = \frac{1}{6} \cdot (2 - 0 + 0)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Fra før: } \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

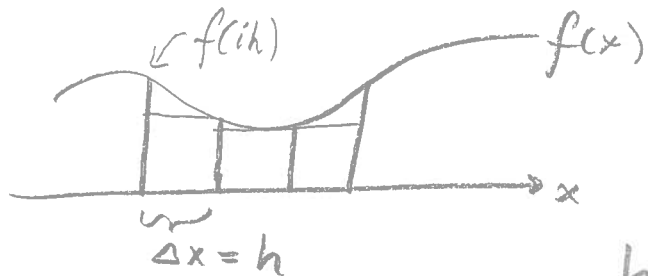
$$\text{Senere i kap 5: } \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx$$

# Forelesningsnotat kap 5.2 del 3

EX: Oppg 5.2.18 (Skvir)

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2}$$

Hvilket integral gir  $S_n$ ?



$$a=0, b=1$$

$$\int_0^1 ? dx$$

$$h \cdot n = 1$$

$$S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n 2h + 3i h^2$$

$$S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n 2 \cdot h + 3 \cdot (ih) \cdot h = \sum f(x_i) \Delta x$$

$$= \sum f(ih) h$$

$$= \sum_{i=1}^n f(ih) \cdot h$$

med  $f(ih) = 2 + 3 \cdot (ih)$

$$f(x) = 2 + 3x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 2 + 3x dx \stackrel{\text{Juks}}{=} \left[ 2x + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = 2 + \frac{3}{2} = \underline{\underline{3 + \frac{1}{2}}}$$

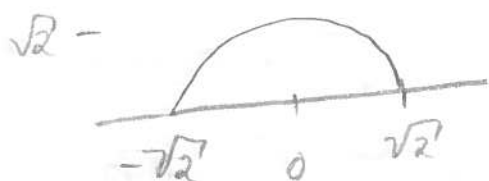
EX: Oppg 5.4.7

Finn  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt$  uten å bruke

anti derivasjon.

løsn

PRØV (hva tid)



$$y = \sqrt{2-t^2}$$

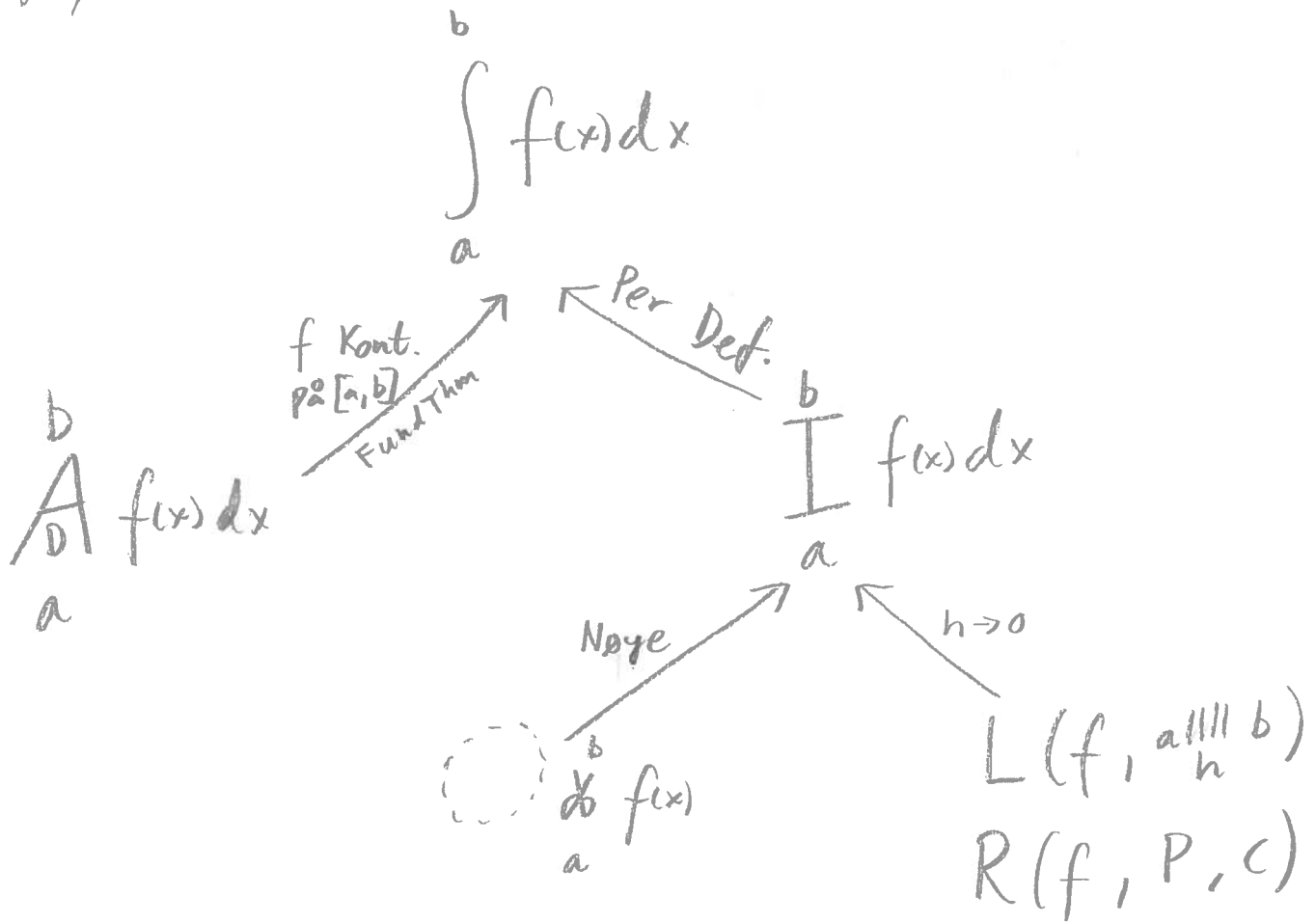
$$y \geq 0$$

$$y^2 = 2-t^2$$

$$y^2 + t^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\text{Areal} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (\sqrt{2})^2}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Appendix 1  
Diagram





## Appendix 2

Question to the audience.

$$1) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Skriver som sum. Flere kan være riktige.

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{k^n}{n!}$$

$$e) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{s!}$$

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{n!}$$

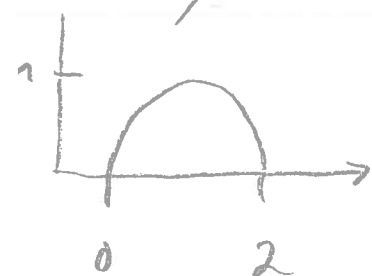
$$f) 1 + x + \frac{x^2}{2} + \sum_{a=3}^n \frac{x^a}{a!}$$

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$d) \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!}$$

2) Hva er størst, av

$$\int_0^{\mu} f(x) dx \quad \text{og} \quad 2 \cdot \int_0^{\Omega} f(2x) dx$$



$$a) \mu < \Omega$$

$$b) \mu = \Omega$$

$$c) \mu > \Omega$$

3) Brak Taylor-polyanom til  $a$  beregne

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{(x^2)}}{x^2}$$

Så langt vi kommer.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots\right)}{x^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{-1}{6} - 1\right) + x^4 \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2}\right) \pm \dots}{x^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \left(\frac{-7}{6}\right) + x^2 \cdot (\text{Noe}) \pm \dots$$

$$L = -\frac{7}{6}$$