BEVIS FOR ABELS TEOREM

Vi vil vise Abels teorem (s. 533 i A & E). Det er tilstrekkelig å vise at hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum 0, så har vi

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Vi setter $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ for $n \geq 0$ og erklærer at $s_{-1} = 0$ slik at vi for alle $n \geq 0$ har $a_n = s_n - s_{n-1}$. Dermed kan vi skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

når $|x| < 1$. Siden $s_n \to 0$, kan vi, for gitt $\varepsilon > 0$, finne en N slik at $|s_n| < \varepsilon/2$ når $n \geq N$. Dermed har vi

$$\left|(1-x) \sum_{n=N}^{\infty} s_n x^n\right| \leq (1-x) \frac{|x|^N \varepsilon/2}{1-|x|} \leq \varepsilon/2$$

når $0 \leq x < 1$. På den annen side kan vi, gitt N, velge x så nær 1 at

$$\left|(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n\right| < \varepsilon/2.$$

Mer presist: Dette holder hvis $|x-1| < \delta$, hvor $\delta = (\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|)^{-1} \varepsilon/2$. Det følger nå ved trekantulikhet at

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| < \varepsilon$$

for $0 < 1 - x < \delta$.

Date: 19. november 2013.