Repitisjon av Diverse Emner

NTNU

December 15, 2012

Oversikt

Å substituere x med en trigonometrisk funksjon, gjør det mulig å evaluere integral av typen

- $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$
- $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$
- $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

der a er en positiv konstant.

$I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$

Her er det ingen begrensninger på integrasjonsintervallet (fordi integranden er definért for alle x).

SUB:

$$x = a \tan \theta$$

Merk: For alle x finnes en, og bare en $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ slik at $x = a \tan \theta$

$I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$ SUB: $x = a\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
dx &= a(1+\tan^2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{a}(a^2 + a^2\tan^2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{a}(a^2 + x^2)d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{a^2+x^2} \\
&= \int \frac{\frac{1}{a}(a^2+x^2)d\theta}{a^2+x^2} \\
&= \frac{1}{a}\int d\theta \\
&= \frac{\theta}{a} + C \\
&= \frac{1}{a}\arctan(x/a) + C
\end{aligned}
$$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Her er det ingen begrensninger på integrasjonsintervallet (fordi integranden er definért for alle x). Der er, også her, mulig å bruke $x = a\tan\theta$, men det er enklere å gjøre substitusjonen

SUB:

$$x = a\sinh\theta$$

Merk: For alle x finnes en, og bare en $-\infty < \theta < \infty$ slik at $x = a\sinh\theta$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ SUB: $x = a\sinh\theta$

$$\begin{aligned} dx &= a\cosh\theta d\theta \\ &= a\sqrt{1+\sinh^2\theta}d\theta \\ &= \sqrt{a^2+a^2\sinh^2\theta}d\theta \\ &= \sqrt{a^2+x^2}d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \\ &= \sinh^{-1}(x/a) + C_1 \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_2 \end{aligned}$$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Her er det begrensninger på integrasjonsintervallet (fordi integranden er definért bare for $|x| < a$).

SUB:

$$x = a \sin \theta$$

Merk: For alle $|x| < a$ finnes en, og bare en $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ slik at $x = a \sin \theta$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ SUB: $x = a\sin\theta$

$$\begin{aligned} dx &= a\cos\theta d\theta \\ &= a\sqrt{1-\sin^2\theta}d\theta \\ &= \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}d\theta \\ &= \sqrt{a^2 - x^2}d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \\ &= \arcsin(x/a) + C \end{aligned}$$

Oppsummering

- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan(x/a) + C$
    - SUB: $x = a\tan\theta$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$
    - SUB: $x = a\sinh\theta$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + C$
    - SUB: $x = a\sin\theta$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Relaterte Rater

- Tegn figur
- Finn alle sammenhengene mellom de aktuelle variablene
- Kjerneregelen
- Bruk Leibnizs notasjon

Eksempel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = k$ er oppgitt. Finn $\frac{dr}{dt}$ når $r = r_0$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dr}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{dV/dt}{dV/dr}\right|_{r=r_0} = \frac{k}{4\pi r_0^2}$$

Differensialligninger

Vi har lært å løse to typer differensialligninger eksakt:

- Separable Differensialligninger
- Førsteordens Lineære Differensialligninger

Separable Differensialligninger

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

der f og g er kjente funksjoner og x_0 og y_0 er gitte tall.
Integrering av de like differensialene

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

vil gi løsningen $y(x)$ implisitt

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Bruk initsialbetingelsen for å finne integrasjonskonstanten.

Førsteordens Lineære Differensialligninger

$$y'(x) + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

der p og q er kjente funksjoner og x_0 og y_0 er gitte tall.

To ting du behøver å huske

- Finn en funksjon $w(x)$ slik at $w'(x) = p(x)$
- Regn ut $\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{w(x)}\right)$

$y'(x) + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$

$$w'(x) = p(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ye^w) &= y'e^w + ye^w w' \\ &= (y' + py)e^w \\ &= qe^w \end{aligned}$$

$$ye^w = \int qe^w \, dx$$

Bruk initsialbetingelsen for å finne integrasjonskonstanten:

$$y(x) = e^{-w(x)} \left(\int_{x_0}^{x} q(u)e^{w(u)} du + y_0 e^{w(0)} \right).$$

Induksjonsbevis

Et induksjonsbevis er et bevis som benytter en metode som er spesielt nyttig når man vil bevise sammenhenger som inkluderer heltall.

Vi ønsker å bevise at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

- Vis at $P(1)$ er sann
- Anta at $P(k)$ er sann for en vilkårlig $k \geq 1$
- Vis at $P(k+1)$ er sann.

Ved induksjon er da $P(n)$ sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Feilestimat vha. Taylors Formel

La f være en funksjon som kan skrives som en Taylorrekke om a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in (-R+a, R+a)$$

La

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$R_N^c(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{(N+1)}.$$

Teorem: For alle N finnes en c mellom x og a slik at

$$f(x) = P_N(x) + R_N^c(x).$$

$f(x) = P_N(x) + R_N^c(x)$

Problem: Finn Taylorpolynomet $P_N(x)$ som tilnærmer $f(x)$ når $x \in I$ med en feil mindre enn ϵ.

- Finn R_N^c, som bare avhenger av N og c, slik at $|R_N^c(x)| \leq R_N^c$ for alle $x \in I$. f.eks $R_N^c = \max_{x \in I} |R_N^c(x)|$
- Finn R_N, som bare avhenger av N, slik at $R_N^c \leq R_N$ for alle $c \in I$. f.eks $R_N = \max_{c \in I} |R_N^c|$
- Finn (den minste) N slik at $R_N < \epsilon$. (tabell)

For, med denne Nen, kan vi med sikkerhet si at

$$|f(x) - P_N(x)| = |R_N^c(x)| \leq R_N^c \leq R_N < \epsilon.$$