Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

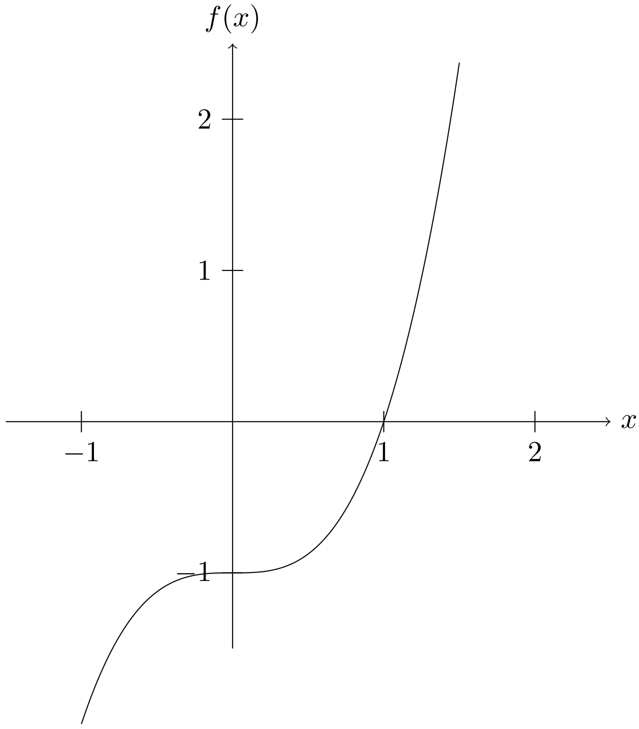
TMA4100
Matematikk 1
Høst 2012

Løsningsforslag til teknostartøving

$\boxed{1}$ **a)** Definisjonsmengden til $f(x) = x^3 - 1$ er $D_f \in (-\infty, \infty)$, som gir at

$$V_f \in (-\infty, \infty)$$

En skisse av funksjonen kan se slik ut:



Siden $f(x)$ er en-til-en, så har $f(x)$ en invers. Dette ser vi ved å bruke den horisontale linjetesten. Hvis man ikke overbevises av denne testen, så kan man bruke definisjonen:

> En funksjon $f(x)$ er en-til-en på et definisjonsområde D hvis og bare hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ for $x_1 \neq x_2$ i D.

Vi bruker altså denne definisjonen til å vise at $f(x) = x^3 - 1$ er en-til-en:
Vi kan bruke en teknikk kalt *Reductio ad absurdum* (latin). Her antar vi det motsatte av det som skal bevises for så å komme frem til en selvmotsigelse:
Anta at $f(x) = x^3 - 1$ ikke er en-til-en, dvs det eksisterer to verdier i definisjonsmengden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ hvor $x_1 \neq x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Det betyr at

$$x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^3 = x_2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

men vi har antatt at $x_1 \neq x_2$ følgelig har vi en selvmotsigelse, og dermed er $f(x)$ en-til-en.

For å finne den inverse funksjonen, $f^{-1}(x)$, så ser vi at

$$f(x) = x^3 - 1 = y$$

gir

$$x = \sqrt[3]{y+1} = f^{-1}(y)$$

Vi bytter x og y og får at

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

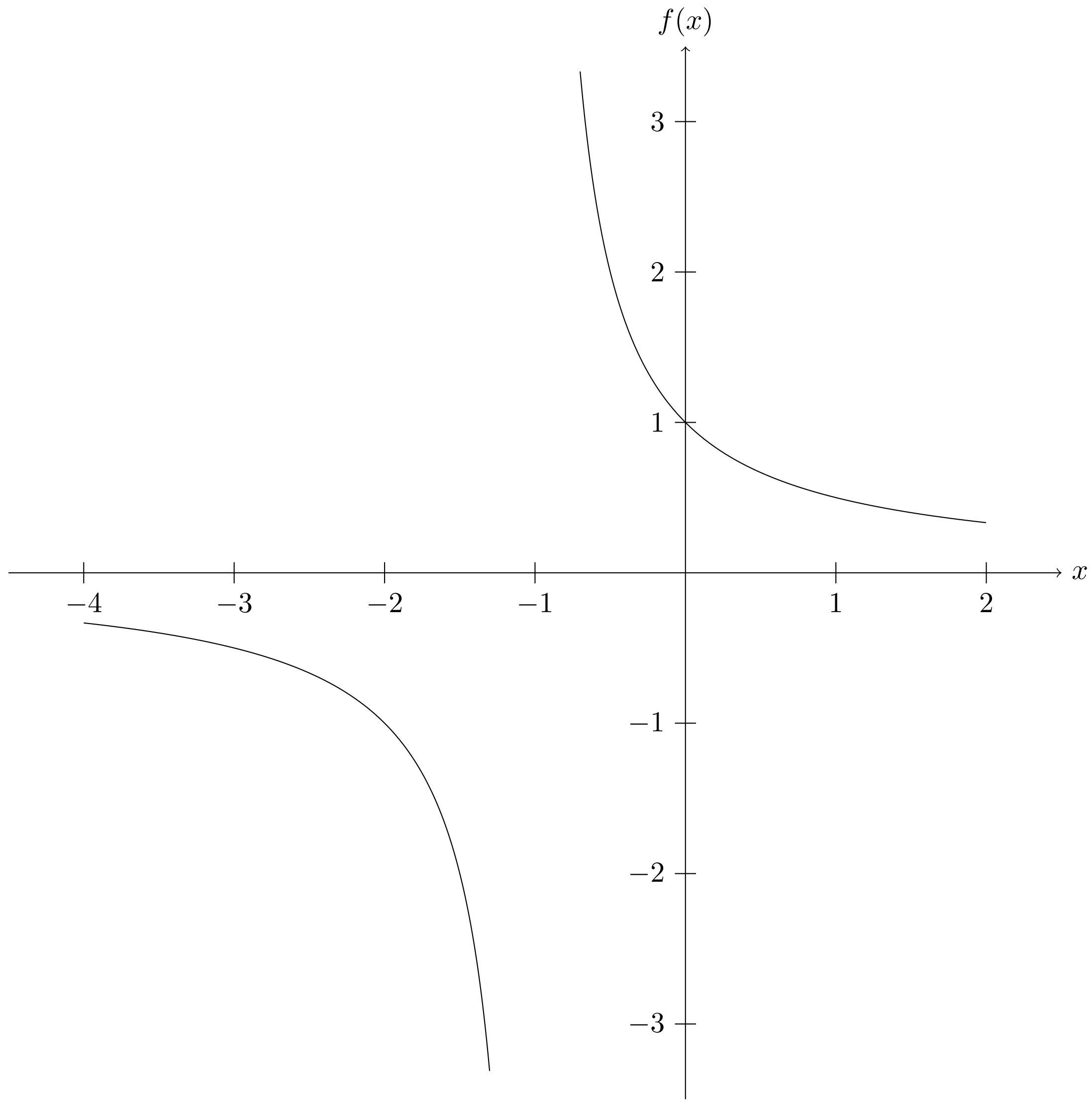
Fra definisjonen har vi at

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{og} \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

b) Definisjonsmengden til $f(x) = \frac{1}{1+x}$ er $D_f \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, som gir at

$$V_f \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

En skisse av funksjonen kan se slik ut:



Siden $f(x)$ er en-til-en, så har $f(x)$ en invers. Dette ser vi ved å bruke den horisontale linjetesten.
For å finne den inverse funksjonen, $f^{-1}(x)$, så ser vi at

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = y$$

gir

$$x = \frac{1}{y} - 1 = f^{-1}(y)$$

Vi bytter x og y og får at

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

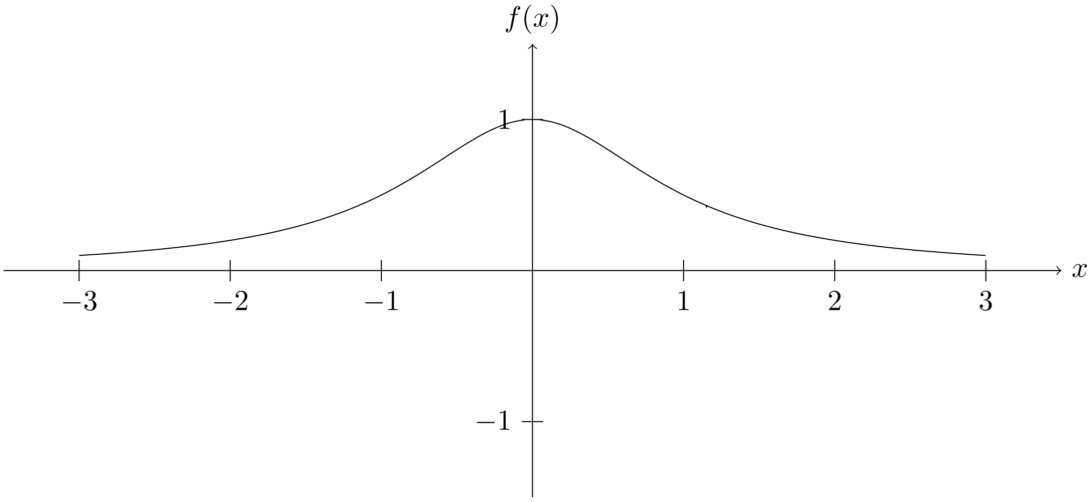
Fra definisjonen har vi at

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{og} \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

c) Definisjonsmengden til $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ er $D_f \in (-\infty, \infty)$, som gir at

$$V_f \in (0, 1]$$

En skisse av funksjonen kan se slik ut:



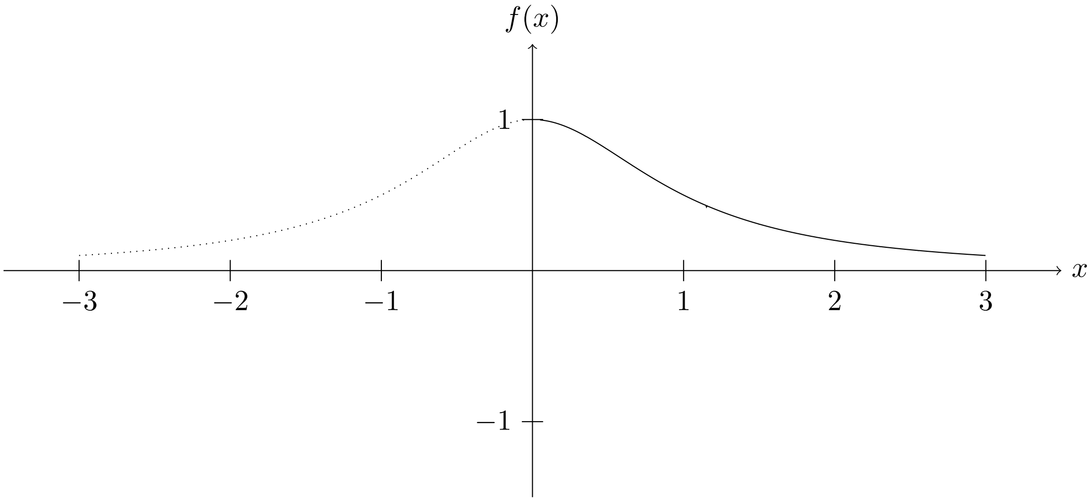
Siden $f(x)$ ikke er en-til-en, så har ikke $f(x)$ en invers. Som vi altså ser ved bruk av den horisontale linjetesten. Eventuelt kan man igjen bruke definisjonen av enentydige funksjoner ved å observere at når man velger $x_1 = -1$ og $x_2 = 1$ så får man at $f(x_1) = f(x_2)$.

d) Definisjonsmengden til $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \geq 0$ er $D_f \in [0, \infty)$, som gir at

$$V_f \in (0, 1]$$

På grunn av funksjonens definisjonsmengde, så er $f(x)$ en-til-en ($f(x_1) \neq f(x_2)$ der $x_1 \neq x_2$). Følgelig har den en invers.

En skisse av funksjonen kan se slik ut:



For å finne den inverse funksjonen, $f^{-1}(x)$, så ser vi at

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = y$$

gir

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1} = f^{-1}(y)$$

Vi er her bare interessert i $x \geq 0$. Dermed har vi at

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$$

Vi bytter x og y og får at

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

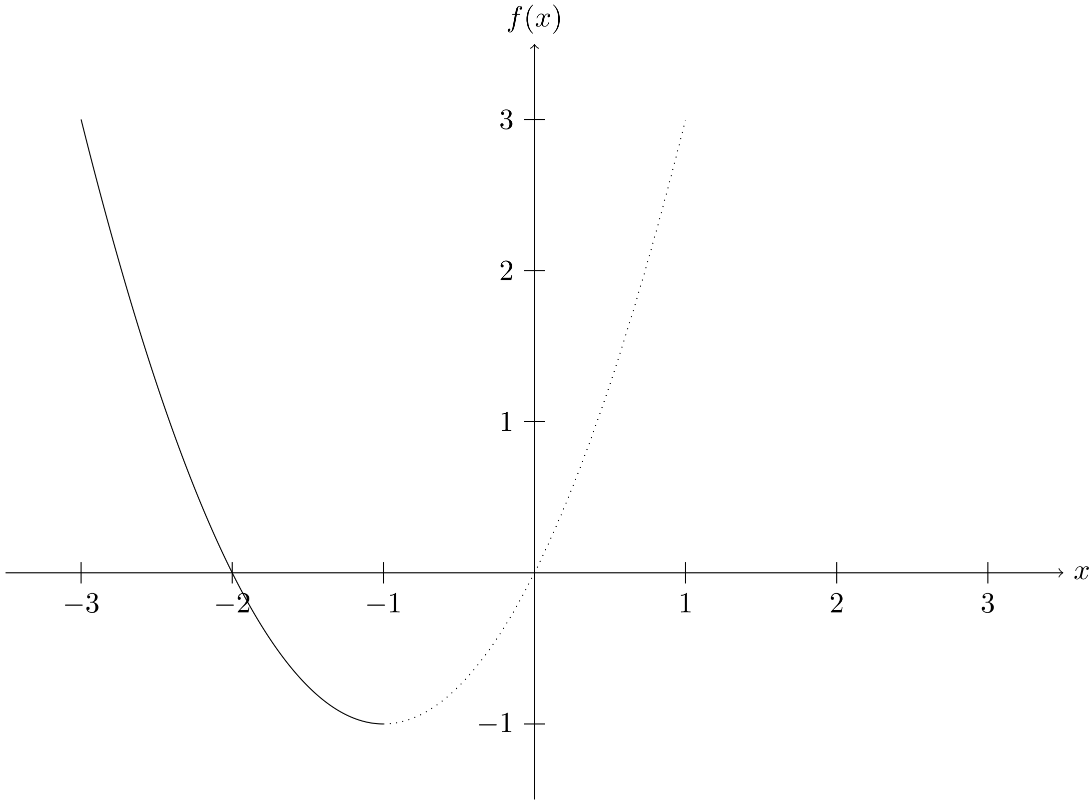
Fra definisjonen har vi at

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{og} \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

e) Definisjonsmengden til $f(x) = x^2 + 2x, x \leq -1$ er $D_f \in (-\infty, -1]$, som gir at

$$V_f \in [-1, \infty)$$

En skisse av funksjonen kan se slik ut:



På grunn av funksjonens definisjonsmengde, så er $f(x)$ en-til-en. Følgelig har den en invers. Ved å fullføre kvadratet så får vi at

$$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 = y$$

Dermed har vi at

$$x = \pm\sqrt{y+1} - 1 = f^{-1}(y)$$

Vi er her bare interessert i $x \leq -1$. Dermed har vi at

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{y+1} - 1$$

Vi bytter x og y og får at

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$$

Fra definisjonen har vi at

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{og} \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

$\boxed{2}$ Oppgitt er $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$, dermed er

$$f\left(g(x)\right) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x\Big|_{x \geq 0}$$

og

$$g\left(f(x)\right) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Siden $f(x)$ ikke er en-til-en, så har ikke $f(x)$ noen invers. $g(x)$ er dermed ingen invers til $f(x)$. Vi merker oss forøvrig at hvis $x \geq 0$ for $f(x)$ så hadde $g(x)$ vært den inverse til $f(x)$.

$\boxed{3}$ Oppgitt er $f(x) = x^2$ og $g(x) = 1 - \sqrt{x}$, dermed er

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - \sqrt{x}) = (1 - \sqrt{x})^2$$

og

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$$

Vi ser da at

$$D_{f \circ g} \in [0, \infty) \quad \text{og} \quad V_{f \circ g} \in [0, \infty)$$

og

$$D_{g \circ f} \in (-\infty, \infty) \quad \text{og} \quad V_{g \circ f} \in (-\infty, 1]$$

$\boxed{4}$

- For $g(x) = x - 5$ og $f(x) = \sqrt{x}$ så har vi at

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 5) = \sqrt{x - 5}$$

- For $g(x) = x + 1$ og $f(x) = x^2 - 1$ så har vi at

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$$

- For $f(x) = \sqrt{x - 3}$ og $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^4 - 3}$ så har vi at

$$\sqrt{x^4 - 3} = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 3} \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x^4$$

- For $g(x) = \frac{x}{x-1}$ og $f(x) = \frac{x}{x-1}$ så har vi at

$$f(g(x)) = f(\frac{x}{x-1}) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x-1)} = x$$

- For $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ og $(f \circ g)(x) = x$ så har vi at

$$f(g(x)) = 1 + \frac{1}{g(x)} = \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = \frac{1}{x - 1}$$

- For $g(x) = \frac{1}{x}$ og $(f \circ g)(x) = x$ så har vi at

$$f(g(x)) = \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

- For $f(x) = \sqrt{x}$ og $(f \circ g)(x) = |x|$ så har vi at

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = |x| = \sqrt{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x^2$$

Dermed blir den utfyllte tabellen seende slik ut:

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x - 5$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x - 5}$
$x + 1$	$x^2 - 1$	$x^2 + 2x$
x^4	$\sqrt{x - 3}$	$\sqrt{x^4 - 3}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x
x^2	$\sqrt{x}$	$\|x\|$

5 **a)** For Q_1P har vi at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{600-150}{20-10} = 45$$

Altså har vi at stigningstallet til sekanten Q_1P er 45m/s. For Q_2P har vi at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{600-294}{20-14} = 51$$

Altså har vi at stigningstallet til sekanten Q_2P er 51m/s. For Q_3P har vi at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{600-382}{20-16} = 54.5$$

Altså har vi at stigningstallet til sekanten Q_3P er 54.5m/s. For Q_4P har vi at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{600-488}{20-18} = 56$$

Altså har vi at stigningstallet til sekanten Q_4P er 56m/s.

b) Siden

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{600-0}{20-10} = 60$$

så har bilen altså fått en fart på omtrent 60m/s etter 20 sekunder .

6 **a)** Vi ser på funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

som gir oss tabellen

x	$f(x)$
0.1	0.9983
0.01	0.999983
0.001	0.99999983

Det er dermed ikke så vanskelig å overbevise seg om at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) Fra funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin x - 10^{-2}x^{0.999}}{x}$$

så ser vi fra følgende tabell

x	$f(x)$
0.1	0.98831
0.01	0.989937
0.001	0.9899305
10^{-7}	0.989767
10^{-14}	-0.01032761
10^{-30}	-0.01071519
10^{-10000}	$-9.99999 \cdot 10^{7}$
$10^{-1000000}$	$-100000 \cdot 10^{998}$

at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

7 **a)** Den deriverte til funksjonen $f(x) = \sqrt{3x}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)}-\sqrt{3x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3(x+h)}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3(x+h)}+\sqrt{3x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3(x+h)}\right)^2 - \left(\sqrt{3x}\right)^2}{h\sqrt{3(x+h)}+\sqrt{3x}} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)-3x}{\sqrt{3}h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \sqrt{3} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Vi har at

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

er likningen for en rett linje gjennom punktet (x_1, y_1). Siden stigningstallet a er gitt ved $a = f'(x_1)$, så har vi at

$$a(x_1) = a(3) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Dermed har vi at

$$y = \frac{1}{2}(x-3) + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

er en likning for den rette linjen.

8 **a)** Sant, uttrykket oppfyller kravene for en grenseverdi.

b) Usant, en grenseverdi kan eksistere i et punkt selv om funksjonensverdien ikke er lik grenseverdien.

c) Usant, denne greseverdien eksisterer ikke, siden grensen fra høyre (1) er forskjellig fra grensen fra venstre (2).

d) Sant, funksjonen er ikke definert for verdier størren enn 3.

e) Sant, uttrykket oppfyller kravene for kontinuitet (spesielle krav for endepunkt).

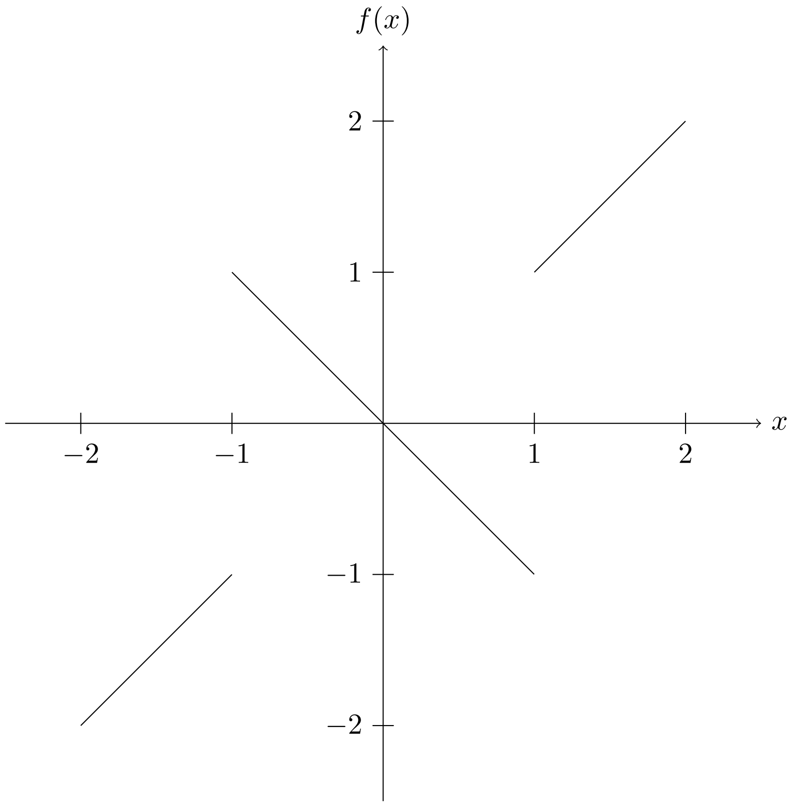
9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^5 + x^2}{4x^5 + 3x^4 + 10x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8 + \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{10}{x^4} + \frac{2}{x^5}} = \frac{8}{4} = 2$$

$\boxed{10}$ For funksjonen

$$f(x) = \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$$

eksisterer det ingen utvidelse i $x = -1$ og $x = 1$ slik at $f(x)$ blir kontinuerlig. Uansett hvilke verdier vi legger til for $x = \pm 1$, så vil ikke grenseverdien fra høyre gå mot grenseverdien fra venstre i $x = \pm 1$, følgelig tilfredsstilles ikke alle krav for kontinuitet. Dette ser vi ved observasjon av grafen nedenfor:



$\boxed{11}$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

For $x \neq 0$ har vi at

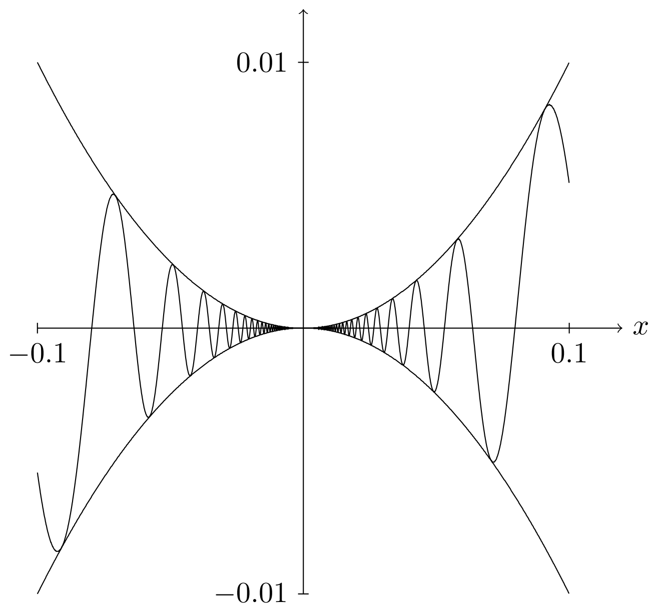
$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

som stemmer siden sinusfunksjonen er en begrenset funksjon fra -1 til 1. $x = 0$ er ikke relevant siden vi ikke kan dele på null.

Vi har at $g(x) = -x^2$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ og $h(x) = x^2$, som gir $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Vi ser også at

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

Da gir skviseteoremet oss at $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.



$\boxed{12}$ Vi må ha at $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$. Vi ser at

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x = -2$$

og

$$f(-2) = b(-2)^2 = 4b$$

Dermed får vi likheten $4b = -2$ som gir at

$$b = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{13}$ f er ikke kontinuerlig på $[-1, 3]$.
Diskontinuitetspunkt: $x = \frac{1}{2}$ og $x = 1$

Dette ser vi ved å bruke kontinuitetstesten:

En funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i $x = c$ hvis og bare hvis den oppfyller følgende krav:

1. $f(c)$ eksisterer
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ eksisterer
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\boxed{14}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

$\boxed{15}$ **a)**

$$f'(x) = \frac{4(x^2+3)-3x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{4x^2+12-8x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{12-4x^2}{(x^2+3)^2}$$

b) Stigningstallet i tangentligningen $y-y_1=a_1(x-x_1)$ er gitt ved $a_1=f'(x)\big|_{x=1}$:

$$f'(1) = \frac{12-4}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}$$

Dermed har vi at

$$y = a_1(x-x_1)+y_1 = \frac{1}{2}(x-1)+1 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

c) Det nye stigningstallet a_2 finner vi ut ifra følgende likning:

$$a_2a_1 = -1 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1} = -2$$

Dermed har vi at

$$y = -2(x-1)+1 = -2x+3$$

$\boxed{16}$ Langs funksjonen $y = x^2 = f(x)$ har vi for en hver x at stigningstallet er gitt ved den deriverte av f:

$$f'(x) = 2x$$

I et eventuelt tangeringspunkt må stigningstallet der være gitt ved

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - (-2)}{x - 0} = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Dermed har vi to likninger for stigningstallet uttrykkt ved x. Kombinerer vi disse så får vi at

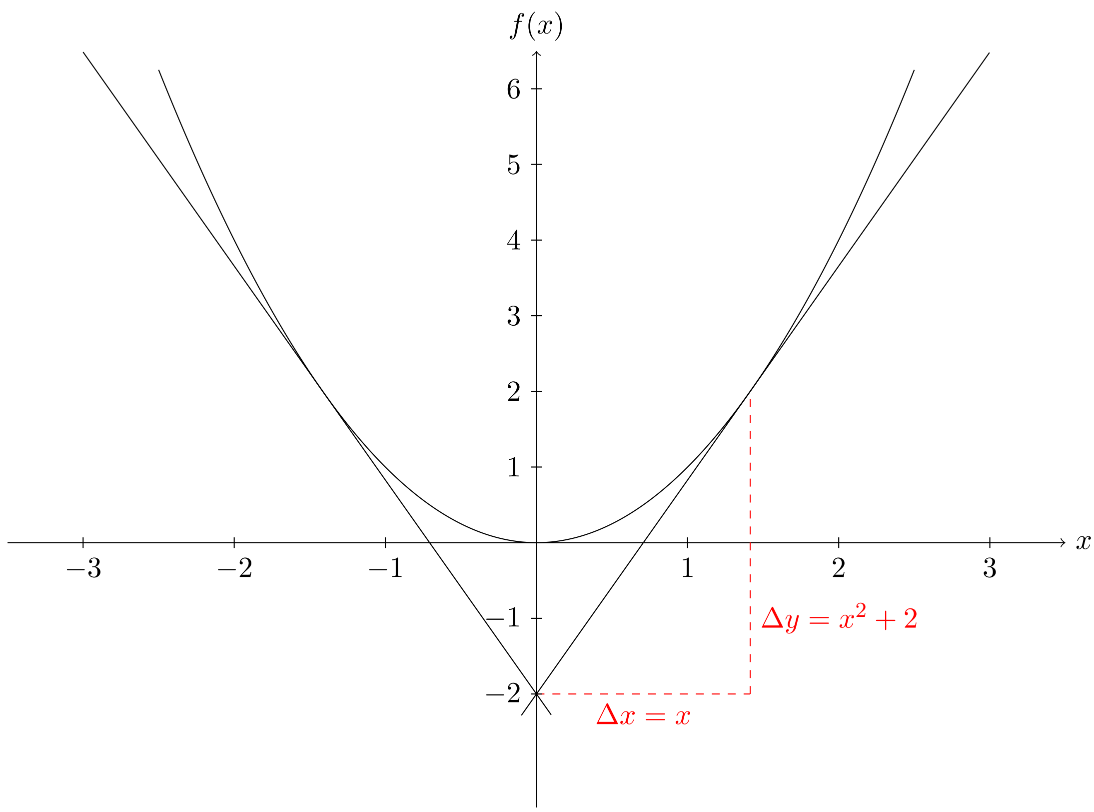
$$\frac{x^2 + 2}{x} = 2x$$

Dette gir oss andregradslikningen

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

som har løsningene $x = \pm\sqrt{2}$. Dermed er stigningstallet $a = \pm 2\sqrt{2}$. Altså har vi to tangentlinjer som går igjennom punktet $(0, -2)$:

$$y_1 = -2 - 2\sqrt{2}x \quad \text{og} \quad y_2 = -2 + 2\sqrt{2}x$$



17 **a)** Ved å bruke en substitusjon så har vi at

$$y = \left(1 - \frac{x}{5}\right)^{-3} = u^{-3} = f(u)$$

der

$$g(x) = 1 - \frac{x}{5} = u$$

Dermed gir kjerneregelen oss at

$$\frac{dy}{dx} = -3u^{-4}g'(x) = -3\left(1 - \frac{x}{5}\right)^{-4}\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right)^{-4}$$

b) Tilsvarende:

$$y = e^{2\sqrt{x}+x^3} = e^u = f(u)$$

der

$$g(x) = 2\sqrt{x} + x^3 = u$$

Som til slutt gir

$$\frac{dy}{dx} = e^u g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2\right) e^{2\sqrt{x}+x^3}$$

18 **a)** Når $v = 0$ så har vi at

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

som har løsningene

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = 2 \pm 1$$

Farten er dermed lik null når $t = 1$ og når $t = 3$. Siden

$$a(t) = v'(t) = 2t - 4$$

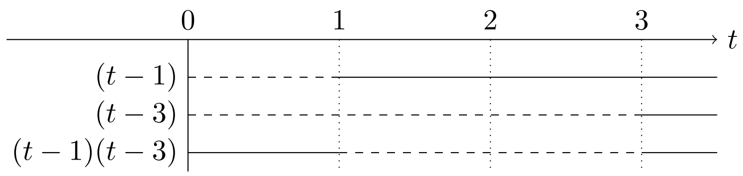
så har vi at

$$a(1) = -2 \quad \text{og} \quad a(3) = 2$$

b) Faktorisering gir at

$$v = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

Partikkelen beveger seg bakover når $v < 0$ og forover når $v > 0$. Dermed vil partikkelen bevege seg forover for $0 \leq t < 1$ og $t > 3$, mens den beveger seg bakover for $1 < t < 3$. Et fortegnsskjema kan her være nyttig:



c) Ved å sette

$$a(t) = 2t - 4 = 0$$

så finner vi at akselerasjonen er null når $t = 2$.

Hastigheten er økende hvis $a(t) > 0$ og avtagende hvis $a(t) < 0$. Altså har vi at hastigheten er økende for $t > 2$ og avtagende for $0 \leq t < 2$.

19 Den deriverte av $y = \sqrt{((f(x))^2 + ((g(x))^2}$ er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{((f(x))^2 + ((g(x))^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x))$$

Med de oppgitte verdiene for $x = 2$ så har vi dermed følgende verdi for den deriverte i $x = 2$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \cdot (4 \cdot 1 + 3 \cdot 5) = \frac{19}{5}$$

20 Derivasjon av $x(t)$ og $y(t)$ med hensyn på t gir at

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{og} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

Vi kan da finne uttrykk for stigningstallet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = \sqrt{\frac{t+1}{t}} = a$$

Likningen for en rett linje er fremdeles $y - y_1 = a(x - x_1)$, så

$$y = \sqrt{\frac{t+1}{t}}(x - \sqrt{2}) + 1$$

I punktet $(x, y) = (\sqrt{2}, 1)$ har vi at $t = 1$. Tangentlinjen er derfor gitt ved

$$y = \sqrt{2}x - 1$$

21 Deriverer vi funksjonene får vi at

$$\frac{dy_1}{dx} = 2x + a \quad \text{og} \quad \frac{dy_2}{dx} = -2x + c$$

Siden $(1, 0)$ er punktet hvor funksjonene har en felles tangentlinje, så må vi hat at

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=1}$$

Dette gir oss likningen

$$(2x + a)\big|_{x=1} = (-2x + c)\big|_{x=1} \quad \Rightarrow \quad c - a = 4$$

Videre må vi også ha at

$$y_1(0) = (1)^2 + a(1) + b = 0$$

og

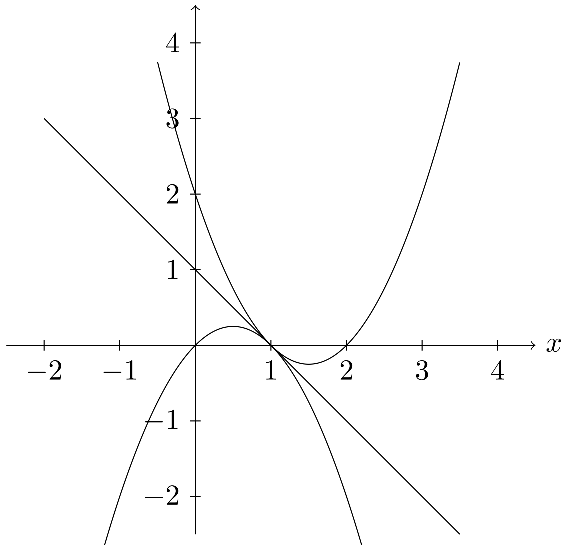
$$y_2(0) = c(1) - (1)^2 = 0$$

Vi har nå skaffet oss tre likninger med tre ukjente:

$$c - a = 4, \qquad a + b + 1 = 0, \qquad c = 1$$

som har løsningen

$$a = -3, \qquad b = 2, \qquad c = 1$$



$\boxed{22}$ Vi påstår at utsagnet er sant.
Anta strikken okkuperer intervallet $[a, b]$ før strekking. For $x \in [a, b]$ la $f(x)$ være posisjonen til punktet x etter strekking. Vi må finne et punkt $c \in [a, b]$ som er slik at $f(c) = c$. Vi antar at strikken ikke brister, f blir da en kontinuerlig funksjon. Sett $g(x) = f(x) - x$. Siden striken strekkes til begge sider, har vi at $f(a) \leq a$ og $f(b) \geq b$, dvs., $g(a) \leq 0$ og $g(b) \geq 0$. Skjæringssetningen gir nå eksistensen av et punkt $c \in [a, b]$ slik at $g(c) = f(c) - c = 0$, dvs., $f(c) = c$.

$\boxed{23}$ Vi bruker samme triks som i forrige oppgave og innfører funksjonen $g(x) = f(x) - x$. Siden f avbilder intervallet $[0, 1]$ inn i seg selv, har vi at $f(0) \geq 0$ og $f(1) \leq 1$. Men det betyr at $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ og $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Skjæringssetningen gir så eksistensen av et punkt $c \in [0, 1]$ slik at $g(c) = f(c) - c = 0$, dvs., $f(c) = c$.