Rekker, Konvergenstester og Feilestimat

NTNU

December 8, 2012

Oversikt

Introduksjon

- For å forstå Taylorrekker, må vi først forstå potensrekker
- For å forstå potensrekker, må vi først forstå rekker.
- For å forstå rekker, må vi først forstå følger.

Følger

Definisjon

En følge er en uendelig samling av tall i en bestemt rekkefølge.

Som f.eks

- $\{2, 4, 6, \dots\} = \{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}$
- $\{a_n\}$ der $a_n = n^2$. Dvs $\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$
- $\{b_n\}$ der $b_n = 1 - 1/n$. Dvs $\{b_n\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$

Hva skjer med tallene i følgen når n blir stor? Følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er representanter for de to klassene man kan dele alle følger inn i.

- $\{a_n\}$ er en divergerende følge
- $\{b_n\}$ er en konvergerende følge

Konvergens

$$\{a_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$
$$\{b_n\} = \{1 - 1/n\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$$

Tallene i rekken $\{a_n\}$ vil ikke nærme seg et punkt på talllinjen. Tallene i rekken $\{b_n\}$ vil bli vilkårlig nært 1. Dvs. hvis jeg sier et tall nært 1, f.eks 0.999, så kan du alltid si en plassering N, f.eks. $N = 2000$, slik at alle tallene lengre ut i rekken enn den N'te plassen, vil være nærmere 1 enn 0.999.

Det er dette som menes med konvergens

En følge $\{b_n\}$ konvergerer mot L dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |b_n - L| < \epsilon.$$

Vi skriver isåfall at

$$\lim_{n \to \infty} b_n = L.$$

Dersom det ikke finnes noen $L \in \mathbb{R}$ slik at følgen konvergerer mot L, så sier vi at følgen divergerer.

Rekker

En rekke er en uendelig sum av tall. Vi skriver dette som

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Det er selvsagt umulig, i praksis, å legge sammen uendelig mange tall, så vi trenger å definere hva som menes med dette vha. begreper som vi kjenner fra før.

Definisjon

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Konvergens

Gitt en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kan vi lage to viktige følger:

- $\{a_n\}$. Følgen av leddene
- $\{s_N\}$. Følgen av delsummer, $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$,

Vi kan nå definere konvergens av en rekke vha. konvergens av følgen av delsummer:

Definisjon

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer dersom følgen $\{s_N\}$ konvergerer. I såfall sier vi at verdien til rekken er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Å finne summen av en rekke

At en rekke konvergerer betyr at den har en sum. Men selv om vi vet at en rekke konvergerer, er det ofte ikke mulig å finne denne summen.Vi har lært tre tilfeller der det er mulig å finne summen av en rekke:

- Når rekken er geometrisk
- Når rekken er teleskoperende
- Når rekken kan utledes fra en kjent Taylorrekke (via derivering, integrering eller algebraisk manipulasjon)

Konvergenstester

Ofte er spørsmålet om konvergens viktigere enn hva selve summen er. Vi har lært mange metoder for å avgjøre om en rekke konvergerer eller ikke.

Konvergenstester

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer
- $\sum_{n=1}^{\infty} cr^{n-1}$ konvergerer $\quad \Longleftrightarrow \quad |r| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer $\quad \Longleftrightarrow \quad p > 1 \qquad$ (p-rekke)
- Rekker med ikke-negative ledd (dvs. $a_n \geq 0 \quad \forall n$):
  - forholdstest / rottest
  - grensesammenligningstest
  - sammenligningstest
  - integraltest
- Rekker med både positive og negative ledd:
  - $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer $\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer
- Alternerende rekker:
  - alternerende rekketesten (Leibnizs Teorem)

Potensrekker

En potensrekke er en rekke der hvert ledd i rekken også er avhengig av en ny variabel x på en spesiell måte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Altså, gitt en x vil vi få en (vanlig) rekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Og et naturlig spørsmål er da om denne rekken konvergerer eller ikke.

Konvergensintervall

For hvilke x konvergerer potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$?

Konvergensintervall og Konvergensradius

Konvergensradiusen er tallet $R \in (0, \infty)$ slik at rekken konvergerer for x som tilfredsstiller $|x-a| < R$ og divergerer for x som tilfredsstiller $|x-a| > R$. Merk

- Hvis rekken konvergerer bare for $x = a$, sier vi at $R = 0$. Hvis rekken konvergerer for alle x, sier vi at $R = \infty$
- De to verdiene av x som tilfredsstiller $|x-a| = R$ må sjekkes separat
- konvergensintervallet til potensrekken blir dermed det åpne, halvåpne eller lukkende intervallet(avhengig av resultatet fra punkt 2) mellom $-R+a$ og $R+a$

Fakta om Potensrekker

En potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ der $|x-a|<R$ er en funksjon

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad |x-a|<R$$

som kan

- deriveres ved å derivere ledd for ledd
- integreres ved å integrere ledd for ledd

Taylorrekker

Potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ der $|x-a| < R$ er en funksjon

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Ved gjenntatt derivasjon og evaluering i punktet $x = a$, vil vi finne at

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Altså er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Taylors Formel

Vi snur spørsmålet: Gitt en uendelig deriverbar funksjon f, vil da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n?$$

La $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Taylors Formel

Det finnes en c mellom a og x slik at

$$f(x) = P_N(x) + \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Hvorfor Taylorrekker?

Vi har en funksjon f og vi ønsker å vite hva $f(x)$ er, når x er i nærheten av et gitt tall a. Problem: f er vanskelig å evaluere.

- $f(x) = \sin x$ nær $x = 0$. Umulig uten kalkulator
- $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ nær $x = 1$. Umulig, selv med kalkulator

Løsning: Polynomer er lette å evaluere, selv med bare penn og papir.

Feilestimat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n$$

Feilestimat for alternerende rekke

$$|f(x) - P_N(x)| \leq |c_{N+1}(x-a)^{N+1}|$$

Taylors Formel

Hvis $f(x)$ er en Taylorrekke, $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, så finnes en c mellom a og x slik at

$$|f(x) - P_N(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \right|.$$