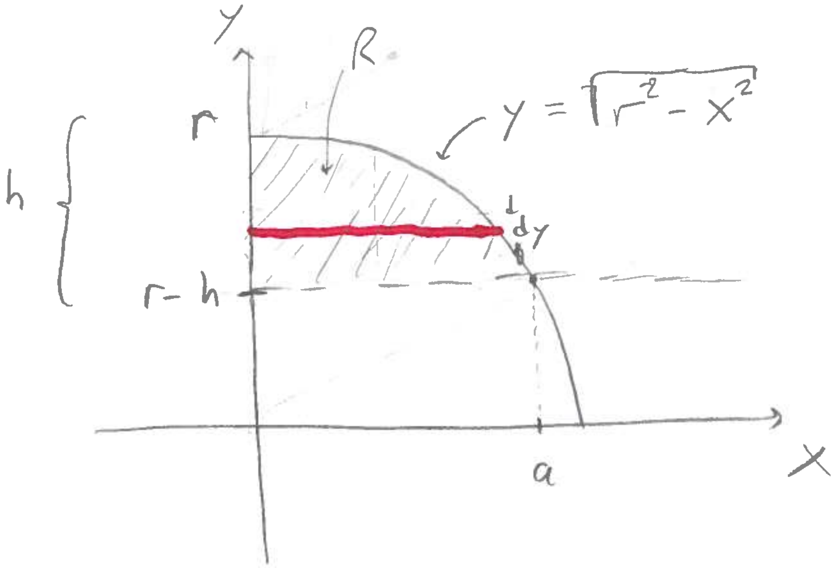
V 2012 (4)

Kulekalotten fremkommer ved å rotere følgende område om y-aksen:



Dvs, R er området $0 \le x \le a$, $r-h \le y \le \sqrt{r^2-x^2}$

Skivemetoden:

tykkelse: dy

radius: $\sqrt{r^2-y^2}$

areal: $\pi\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 = \pi(r^2-y^2)$

Volum: $dV = \pi(r^2-y^2)\,dy$

Integrasjonsgrenser: $y=r-h$ og $y=r$

Volum av legemet

$$V = \int_{y=r-h}^{y=r} dV = \int_{r-h}^{r} \pi(r^2-y^2)\,dy$$

$$= \pi\left[r^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{r-h}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(r^2(r-h) - \frac{1}{3}(r-h)^3\right)\right)$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - r^3 + r^2h + \frac{1}{3}\left(\cancel{r^3} - 3hr^2 + 3h^2r - h^3\right)\right) = \pi\left(h^2r - \frac{1}{3}h^3\right)$$

Uttrykt ved a og h:

Se at

$$(r-h)^2 + a^2 = r^2$$

så

$$r^2 - 2rh + h^2 + a^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{a^2+h^2}{2h}$$

Dermed:

$$V = \pi\left(h^2 r - \frac{1}{3}h^3\right) = \pi\left(\frac{1}{2}h(a^2+h^2) - \frac{1}{3}h^3\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(3ha^2 + 3h^3 - 2h^3\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(3ha^2 + h^3\right)}}$$