# Eksamen Vår 2009, Oppgave 6

*Estimer integralet*

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{dx}$$

*med en feil mindre enn* 0.02*.*

# Eksamen Vår 2009, Oppgave 6

*Estimer integralet*

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

*med en feil mindre enn* 0.02.

Bruker trapesmetoden med

- $f(x) = \sin(x^2)$
- $a = 0,\ b = 1$
- $n$ delintervaller
- $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

Ønsker å finne $n$ som gir $|E_T| \leq 0.02$.

Feilen $|E_T| = \left|\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{dx} - T\right|$ i trapesmetoden er

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2},$$

der $M$ er slik at $|f''(x)| \leq M$.

Feilen $|E_T| = \left|\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{dx} - T\right|$ i trapesmetoden er

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2},$$

der $M$ er slik at $|f''(x)| \leq M$.

Må finne en $M$ som fungerer:

Vi har at

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) \\ f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2). \end{aligned}$$

Lar $M = 2 + 4 = 6$.

**Merk:**

> Hvorfor $M = 6$? Den største verdien $f''(x)$ potensielt kan ta oppnås dersom $\cos(x^2) = 1$ og $\sin(x^2) = -1$.

Vi har at

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x^2) \\
f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\
f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).
\end{aligned}
$$

Lar $M = 2 + 4 = 6$.

**Merk:**

Hvorfor $M = 6$? Den største verdien $f''(x)$ potensielt kan ta oppnås dersom $\cos(x^2) = 1$ og $\sin(x^2) = -1$.

Faktisk så kan ikke $f''(x)$ bli større enn 2 på $[0, 1]$, men $M$ behøver kun å være en *øvre grense* for maksimum, ikke nødvendigvis reellt maksimum.

Har altså at

$$|E_T| \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Finner første verdi av $n$ som gir $|E_T| \leq 0.02$:

| $n$ | $1/2n^2$ |
|---|---|
| 1 | $1/2 = 0.5$ |
| 2 | $1/8 = 0.125$ |
| 3 | $1/18 = 0.05555\ldots$ |
| 4 | $1/32 = 0.03125$ |
| 5 | $1/50 = 0.02$ |

Har altså at

$$|E_T| \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Finner første verdi av $n$ som gir $|E_T| \leq 0.02$:

| $n$ | $1/2n^2$ |
|---|---|
| 1 | $1/2 = 0.5$ |
| 2 | $1/8 = 0.125$ |
| 3 | $1/18 = 0.05555\ldots$ |
| 4 | $1/32 = 0.03125$ |
| 5 | $1/50 = 0.02$ |

Har altså at

$$|E_T| \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Finner første verdi av $n$ som gir $|E_T| \leq 0.02$:

| $n$ | $1/2n^2$ |
|---|---|
| 1 | $1/2 = 0.5$ |
| 2 | $1/8 = 0.125$ |
| 3 | $1/18 = 0.05555\ldots$ |
| 4 | $1/32 = 0.03125$ |
| 5 | $1/50 = 0.02$ |

Dermed er

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{dx} \approx \frac{1/5}{2}(\sin(0) + \sin(1) + 2(\sin\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin\left(\frac{2}{5}\right)^2$$
$$+ \sin\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sin\left(\frac{4}{5}\right)^2))$$
$$\approx 0.314,$$

med en feil mindre enn 0.02.