Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{dt}}{x^3}$$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3}$$

En mulig strategi: Bestem først integralet ved hjelp av delvis integrasjon og polynomdivisjon (får $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1} x$). Divider med x^3 og studer grensen.

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^3}$$

Enklere: Fra Taylorrekken til $\ln(1+t)$ kan vi finne Taylorrekken til $\ln(1+t^2)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+t^2) &= t^2 - \frac{(t^2)^2}{2} + \frac{(t^2)^3}{3} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{n}, \quad |t| \le 1.\end{aligned}$$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{dt}}{x^3}$$

Enklere: Fra Taylorrekken til $\ln(1+t)$ kan vi finne Taylorrekken til $\ln(1+t^2)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+t^2) &= t^2 - \frac{(t^2)^2}{2} + \frac{(t^2)^3}{3} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{n}, \quad |t| \le 1.\end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{dt} &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{n}\,\mathrm{dt} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n+1)},\end{aligned}$$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

og

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{n(2n+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{3\cdot 7} + \cdots \right)
\end{aligned}$$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 27

og

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{n(2n+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{3\cdot 7} + \cdots \right)
\end{aligned}$$

Altså er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Eksamen H2010, Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_1^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{dt}\,.$$

Finn et polynom $p(x)$ slik at $|f(x) - p(x)| < 0.02$ når $0.9 < x < 1.1$.

Eksamen H2010, Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_1^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \, .$$

Finn et polynom $p(x)$ slik at $|f(x) - p(x)| < 0.02$ når $0.9 < x < 1.1$.

Bruker Taylorpolynom rundt $x = 1$

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

som tilnærming til $f(x)$.

Eksamen H2010, Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_1^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t\,.$$

Finn et polynom $p(x)$ slik at $|f(x) - p(x)| < 0.02$ når $0.9 < x < 1.1$.

Bruker Taylorpolynom rundt $x = 1$

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

som tilnærming til $f(x)$.
Er $P_1(x)$ en tilstrekkelig god tilnærming?

Eksamen H2010, Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_1^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{dt}\,.$$

Finn et polynom $p(x)$ slik at $|f(x) - p(x)| < 0.02$ når $0.9 < x < 1.1$.

Bruker Taylorpolynom rundt $x = 1$

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

som tilnærming til $f(x)$.
Er $P_1(x)$ en tilstrekkelig god tilnærming? Har at

$$f(1) = \int_1^1 \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{dt} = 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{dt} = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

$$f'(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Eksamen H2010, Oppgave 8

Dermed blir

$$P_1(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1.$$

Taylors formel:

$$|R_N(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2 \right|,$$

for en c mellom 1 og x.
Trenger $f''(x)$:

Eksamen H2010, Oppgave 8

Dermed blir

$$P_1(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) = x - 1.$$

Taylors formel:

$$|R_N(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2 \right|,$$

for en c mellom 1 og x.
Trenger $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = \pi x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Dermed blir

$$P_1(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1.$$

Taylors formel:

$$|R_N(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2 \right|,$$

for en c mellom 1 og x.
Trenger $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = \pi x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Siden $\left|\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right| \leq 1$ blir

$$\begin{aligned} |f(x) - P_1(x)| &= \left|\frac{\pi c \cos(\frac{\pi}{2} c^2)}{2!}(x-1)^2\right| \\ &\leq \left|\frac{\pi c}{2!}(x-1)^2\right| \end{aligned}$$

Eksamen H2010, Oppgave 8

Dersom $0.9 < x < 1.1$ så er

$$|x - 1| < 0.1,$$

og

$$0.9 < c < 1.1$$

Eksamen H2010, Oppgave 8

Dersom $0.9 < x < 1.1$ så er

$$|x-1| < 0.1,$$

og

$$0.9 < c < 1.1$$

Dermed

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_1(x)| &\leq \left|\frac{\pi c}{2!}(x-1)^2\right| \\
&\leq \left|\frac{\pi c}{2!}(0.1)^2\right| \\
&\leq \frac{\pi \cdot 1.1}{2!}(0.1)^2 \\
&\approx 0.0173
\end{aligned}$$

Eksamen H2010, Oppgave 8

Dersom $0.9 < x < 1.1$ så er

$$|x - 1| < 0.1,$$

og

$$0.9 < c < 1.1$$

Dermed

$$\begin{aligned} |f(x) - P_1(x)| &\leq \left|\frac{\pi c}{2!}(x-1)^2\right| \\ &\leq \left|\frac{\pi c}{2!}(0.1)^2\right| \\ &\leq \frac{\pi \cdot 1.1}{2!}(0.1)^2 \\ &\approx 0.0173 \end{aligned}$$

Altså:

$$f(x) \approx x - 1$$

og feilen i tilnærmingen er < 0.02 så lenge $0.9 < x < 1.1$.

Eksamensoppgaveamlingen, Oppgave 58

Gitt potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

(a) Finn konvergensradien R, og avgjør om rekken konvergerer for $x = \pm R$

(b) La $S(x)$ være summen av rekken for $|x| < R$, og la

$$S_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n \ln n}, \quad N \geq 2.$$

Finn en N slik at $|S(-1/2) - S_N(-1/2)| < 10^{-3}$.

Eksamensoppgaveamlingen, Oppgave 58

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

(a) Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \ln(n)}{(n+1)\ln(n+1)} \right| |x|$$
$$= 1 \cdot |x| = |x|.$$

Konvergensradien er dermed $R = 1$. (At grensen blir $|x|$ kan sjekkes vha. L'Hopital)
Når $x = -1$ blir rekken $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, som konvergerer ved den alternerende rekke-testen (Leibniz-testen).

Eksamensoppgaveamlingen, Oppgave 58

Når $x = 1$ blir rekken $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}$.
Bruker **integraltesten** med $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ (positiv, avtagende, kontinuerlig). Ved å la $u = \ln x$ får vi at

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x \ln x} &= \int_{ln2}^\infty \frac{\mathrm{du}}{u} \\
&= \lim_{b \to \infty} \int_{ln2}^b \frac{\mathrm{du}}{u} \\
&= \lim_{b \to \infty} \ln(b) - \ln(\ln(2)) = \infty
\end{aligned}$$

Eksamensoppgaveamlingen, Oppgave 58

Når $x = 1$ blir rekken $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}$.
Bruker **integraltesten** med $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ (positiv, avtagende, kontinuerlig). Ved å la $u = \ln x$ får vi at

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x \ln x} &= \int_{ln2}^\infty \frac{\mathrm{du}}{u} \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_{ln2}^b \frac{\mathrm{du}}{u} \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln(\ln(2)) = \infty\end{aligned}$$

Konklusjon: Rekken

konvergerer absolutt for $|x| < R$

konvergerer betinget for $x = -1$

divergerer ellers

(b) Har at

$$S(-1/2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n \ln n}$$

Rekken er **alternerende**, så størrelsen på feilen i tilnærmingen $S(-1/2) \approx S_N(-1/2)$ er mindre enn absoluttverdien til første utelatte ledd. Det vil si

$$\begin{aligned} E(N) = |S(-1/2) - S_N(-1/2)| &\leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1} N \ln N} \right| \\ &= \frac{1}{2^{N+1} N \ln N} \end{aligned}$$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 58

(b) Har at

$$S(-1/2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n \ln n}$$

Rekken er **alternerende**, så størrelsen på feilen i tilnærmingen $S(-1/2) \approx S_N(-1/2)$ er mindre enn absoluttverdien til første utelatte ledd. Det vil si

$$\begin{aligned} E(N) = |S(-1/2) - S_N(-1/2)| &\leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1} N \ln N} \right| \\ &= \frac{1}{2^{N+1} N \ln N} \end{aligned}$$

Når $N = 4$: feilen er mindre enn $1/2^5 \cdot 4 \cdot \ln(4) \approx 0.006$
Når $N = 5$: feilen er mindre enn $1/2^6 \cdot 5 \cdot \ln(5) \approx 0.002$
Når $N = 6$: feilen er mindre enn $1/2^7 \cdot 6 \cdot \ln(6) \approx 0.0007$

Eksamensoppgavesamlingen, Oppgave 58

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}, \quad |x| < 1$$

Altså:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n \ln n} \approx \sum_{n=2}^{6} \frac{(-1)^n}{2^n n \ln n},$$

med en feil mindre enn 10^{-3}