Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

For hvilke x konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

For hvilke x konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Finner først for hvilke x den konvergerer absolutt ved å bruke forholdstesten med $a_n = \frac{(x+1)^n}{n2^n}$:

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

For hvilke x konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Finner først for hvilke x den konvergerer absolutt ved å bruke forholdstesten med $a_n = \frac{(x+1)^n}{n2^n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+1)^{n+1}/(n+1)2^{n+1}}{(x+1)^n/n2^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}\right| \left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}\right| |x+1| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} |x+1| \\
&= \frac{1}{2} |x+1| = \rho.
\end{aligned}$$

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

Forholdstesten gir at rekken

konvergerer absolutt for $|x+1| < 2$ (dvs. $-3 < x < 1$)

divergerer for $|x+1| > 2$ (dvs. $-\infty < x < -3$ og $1 < x < \infty$).

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

Forholdstesten gir at rekken

konvergerer absolutt for $|x+1| < 2$ (dvs. $-3 < x < 1$)

divergerer for $|x+1| > 2$ (dvs. $-\infty < x < -3$ og $1 < x < \infty$).

Må sjekke endepunktene $x = -3$ og $x = 1$:

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

Forholdstesten gir at rekken

konvergerer absolutt for $|x+1| < 2$ (dvs. $-3 < x < 1$)

divergerer for $|x+1| > 2$ (dvs. $-\infty < x < -3$ og $1 < x < \infty$).

Må sjekke endepunktene $x = -3$ og $x = 1$:

$\underline{x = -3:}$ Får rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

som vi vet at konvergerer (alternerende harmoniske rekken).

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

Forholdstesten gir at rekken

konvergerer absolutt for $|x+1| < 2$ (dvs. $-3 < x < 1$)

divergerer for $|x+1| > 2$ (dvs. $-\infty < x < -3$ og $1 < x < \infty$).

Må sjekke endepunktene $x = -3$ og $x = 1$:

$\underline{x = -3}$: Får rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

som vi vet at konvergerer (alternerende harmoniske rekken).

$\underline{x = 1}$: Får rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

som vi vet at divergerer (harmoniske rekken).

Eksamen Høst 2009, Oppgave 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Oppsummering:

Konvergerer absolutt for $|x+1| < 2$

Divergerer for $|x+1| > 2$ og for $x = 1$

Konvergerer betinget for $x = -3$.