Pauseoppgaver

Eksamenssamlingen, Oppg. 28. Et vannkar fremkommer ved å dreie kurven

$$x = \sqrt[4]{\sin y}, \quad \text{for} \quad 0 \leq y \leq \pi/2$$

om y-aksen. (Benevning for x og y er dm).

(a) Sett opp et integral (uten å regne ut integralet) for vannvolumet når vanndybden midt i karet er h.

(b) Karet fylles med vann. Vannmengden som strømmer inn i karet pr. tidsenhet er konstant og lik 2 liter pr. minutt. Hvor fort øker vanndybden h når $h = \pi/6$ dm?

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.

(a) En beholder med høyde h lages ved å rotere kurven $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{h}$, om aksen $x = -1$ og sette en plan bunn i.
Vis at volumet V av beholderen er

$$V = \frac{\pi}{6}(6h + 8h^{3/2} + 3h^2).$$

(b) Bruk Newtons metode til å finne høyden h av beholderen med 2 korrekte desimaler når beholderen skal ha volum $V = 10$.

(a) Figur:

Skivemetoden:

$$\begin{aligned} dV &= \text{areal} \cdot \text{tykkelse} \\ &= \pi((\sqrt[4]{\sin y})^2)dy \\ &= \pi\sqrt{\sin y}dy \end{aligned}$$

(a) Figur:

Skivemetoden:

$$\begin{aligned} dV &= \text{areal} \cdot \text{tykkelse} \\ &= \pi((\sqrt[4]{\sin y})^2)dy \\ &= \pi\sqrt{\sin y}dy \end{aligned}$$

Får

$$V = \pi \int_0^h \sqrt{\sin y}dy,$$

(målt i dm^3).

(b) La

$$f(t) = \text{vannmengden ved tiden t (målt i liter).}$$

Vet at $\frac{df}{dt} = 2$. Vil finne $\frac{dh}{dt}$ når $h = \pi/6$.

(b) La

$$f(t) = \text{vannmengden ved tiden t (målt i liter).}$$

Vet at $\frac{df}{dt} = 2$. Vil finne $\frac{dh}{dt}$ når $h = \pi/6$.
Siden 1 liter $= 1\ dm^3$, så

$$f(t) = V(t) = \pi \int_0^h \sqrt{siny}\,dy.$$

(b) La

$$f(t) = \text{vannmengden ved tiden t (målt i liter).}$$

Vet at $\frac{df}{dt} = 2$. Vil finne $\frac{dh}{dt}$ når $h = \pi/6$.
Siden 1 liter $= 1\ dm^3$, så

$$f(t) = V(t) = \pi \int_0^h \sqrt{siny}dy.$$

Får

$$2 = \frac{df}{dt} = \pi\sqrt{siny}\frac{dh}{dt},$$

så

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi\sqrt{siny}}.$$

(b) La

$$f(t) = \text{vannmengden ved tiden t (målt i liter).}$$

Vet at $\frac{df}{dt} = 2$. Vil finne $\frac{dh}{dt}$ når $h = \pi/6$.
Siden 1 liter $= 1\ dm^3$, så

$$f(t) = V(t) = \pi \int_0^h \sqrt{siny}dy.$$

Får

$$2 = \frac{df}{dt} = \pi\sqrt{siny}\frac{dh}{dt},$$

så

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi\sqrt{siny}}.$$

Når $h = \pi/6$ får vi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi\sqrt{\sin(\pi/6)}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Pauseoppgaver

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.

(a) En beholder med høyde h lages ved å rotere kurven $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{h}$, om aksen $x = -1$ og sette en plan bunn i.

Vis at volumet V av beholderen er

$$V = \frac{\pi}{6}(6h + 8h^{3/2} + 3h^2).$$

(b) Bruk Newtons metode til å finne høyden h av beholderen med 2 korrekte desimaler når beholderen skal ha volum $V = 10$.

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.
Figur:

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.
Figur:

$$V = V_{\text{omdreiningslegemet}} + V_{\text{over bunnen}}$$

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.
Figur:

$$V = V_{\text{omdreiningslegemet}} + V_{\text{over bunnen}}$$

Omdreiningslegemet:

høyde: $h - x^2$

omkrets: $2\pi(x+1)$

volum: $dV = 2\pi(x+1)(h-x^2)dx$

Eksamenssamlingen, Oppg. 39.

Figur:

$$V = V_{\text{omdreiningslegemet}} + V_{\text{over bunnen}}$$

Omdreiningslegemet:

høyde: $h - x^2$

omkrets: $2\pi(x+1)$

volum: $dV = 2\pi(x+1)(h-x^2)dx$

$$\begin{aligned} V_{\text{omdreining}} &= \int_{x=0}^{x=\sqrt{h}} dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} (x+1)(h-x^2)dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4}h^2 + \frac{2}{3}h^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Har

$$\begin{aligned} V_{\text{over bunnen}} &= \text{volum av sylinder med høyde h og radius 1} \\ &= \pi 1^2 h = \pi h. \end{aligned}$$

Har

$$\begin{aligned} V_{\text{over bunnen}} &= \text{volum av sylinder med høyde h og radius 1} \\ &= \pi 1^2 h = \pi h. \end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left(\frac{1}{4} h^2 + \frac{2}{3} h^{3/2} + \frac{1}{2} h \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(3h^2 + 8h^{3/2} + 6h \right). \end{aligned}$$

(b) La

$$V(h) = \frac{\pi}{6}\left(3h^2 + 8h^{3/2} + 6h\right).$$

Ønsker å estimere h slik at $V(h) = 10$.

(b) La

$$V(h) = \frac{\pi}{6}\left(3h^2 + 8h^{3/2} + 6h\right).$$

Ønsker å estimere h slik at $V(h) = 10$.
Med andre ord, estimere $f(h) = 0$ der

$$f(h) = V(h) - 10.$$

(b) La

$$V(h) = \frac{\pi}{6}\left(3h^2 + 8h^{3/2} + 6h\right).$$

Ønsker å estimere h slik at $V(h) = 10$.
Med andre ord, estimere $f(h) = 0$ der

$$f(h) = V(h) - 10.$$

Newtons metode (Rottmann s. 175):

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$$

Vi har

$$f'(h) = \frac{\pi}{6}\left(6 + 12h^{1/2} + 6h\right) - 10.$$

Gjetter $h_0 = 1$. Får

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)}$$
$$= 1 - \frac{\frac{\pi}{6}(6+8+3) - 10}{\frac{\pi}{6}(6+12+6)}$$
$$\approx 1.087$$

$$h_2 = 1.087 - \frac{f(1.087)}{f'(1.087)}$$
$$\approx 1.085.$$

Ser ut til å stabilisere seg på

$$h \approx 1.09$$