Operasjoner på potensrekker (repetisjon)

"Oppfører seg som polynomer innenfor intervall med absolutt konvergens"

Operasjoner på potensrekker (repetisjon)

"Oppfører seg som polynomer innenfor intervall med absolutt konvergens"

Multiplikasjon: Anta $A(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ og $B(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ for $|x| < R$. Da er

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_0^\infty b_n x^n\right) = \sum_0^\infty c_n x^n, \quad |x| < R$$

med $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

Operasjoner på potensrekker (repetisjon)

"Oppfører seg som polynomer innenfor intervall med absolutt konvergens"

Multiplikasjon: Anta $A(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ og $B(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ for $|x| < R$. Da er

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_0^\infty a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_0^\infty b_n x^n \right) = \sum_0^\infty c_n x^n, \quad |x| < R$$

med $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

Derivasjon og integrasjon: Anta $f(x) = \sum_0^\infty$ for $|x| < R$. Da er

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$

Operasjoner på potensrekker (repetisjon)

"Oppfører seg som polynomer innenfor intervall med absolutt konvergens"

Multiplikasjon: Anta $A(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ og $B(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ for $|x| < R$. Da er

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_0^\infty b_n x^n\right) = \sum_0^\infty c_n x^n, \quad |x| < R$$

med $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

Derivasjon og integrasjon: Anta $f(x) = \sum_0^\infty$ for $|x| < R$. Da er

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Operasjoner på potensrekker (repetisjon)

"Oppfører seg som polynomer innenfor intervall med absolutt konvergens"

Multiplikasjon: Anta $A(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ og $B(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ for $|x| < R$. Da er

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_0^\infty b_n x^n\right) = \sum_0^\infty c_n x^n, \quad |x| < R$$

med $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

Derivasjon og integrasjon: Anta $f(x) = \sum_0^\infty$ for $|x| < R$. Da er

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

(integrerer og deriverer altså ledd for ledd).

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Da er

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1.$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Da er

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1.$$

Får

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Da er

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1.$$

Får

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} &= 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Da er

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1.$$

Får

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} &= 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad |x| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da er

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da er

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Får

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \tan^{-1}(x) + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da er

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Får

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \tan^{-1}(x) + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Ser at når $x = 0$ er både rekken og $\tan^{-1} x$ lik 0, så $C = 0$.

Eksempel

La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da er

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Får

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{dx} = \tan^{-1}(x) + C &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\ &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

Ser at når $x = 0$ er både rekken og $\tan^{-1} x$ lik 0, så $C = 0$.

$$\tan^{-1}(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Faktum: Gjelder også for $x = \pm 1$. (Følger av *Abels teorem*)

Eksempel

Har

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

Eksempel

Har

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

så

$$\ln(1+x) + C = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Når $x = 0$ er rekken og $\ln(1+x)$ lik 0, så $C = 0$.

Eksempel

Har

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

så

$$\ln(1+x) + C = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Når $x = 0$ er rekken og $\ln(1+x)$ lik 0, så $C = 0$.

$$\ln(1+x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Faktum: gjelder også for $x = 1$. (Abels teorem)