



NTNU

Det skapende universitet

Differensiallikninger **Forelesning i Matematikk 1 TMA4100**

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag
25. november 2011

Kapittel 15.4.

Eulers metode

Eulers forbedrede metode

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$z_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})}{2} \right)$$



NTNU

Det skapende universitet

Kapittel 15.5.

Grafisk løsning av autonome likninger



NTNU

Det skapende universitet

Autonom differensiallikning

$$\frac{dy}{dx} = F(y)$$

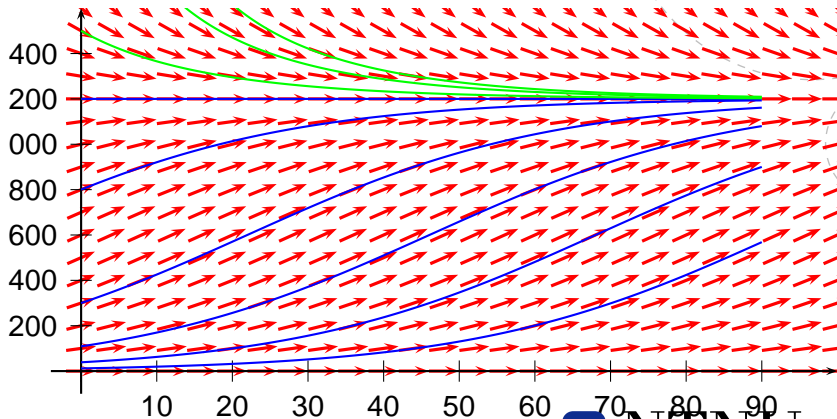


NTNU

Det skapende universitet

Retningsvektorfelt logistisk modell

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P(1 - P/1200)$$



Figur: Retningsfelt med skisse av løsningskurvene

Begreper

- Faselinje
- Stabil likevekt
- Ustabil likevekt

Konkavitet av løsninger

Vi vil trenge den deriverte av likningen

$$y' = F(y)$$

$$y'' = F'(y)y' = F'(y) \cdot F(y)$$

- Konkav opp: $y'' > 0$
- Konkav ned: $y'' < 0$



NTNU

Det skapende universitet

Konkavitet av løsninger

Vi vil trenge den deriverte av likningen

$$y' = F(y)$$

$$y'' = F'(y)y' = F'(y) \cdot F(y)$$

- Konkav opp: $y'' > 0$
- Konkav ned: $y'' < 0$



NTNU

Det skapende universitet

Logistisk modell

Maks befolkningen over lang tid: $P = K$. Modifiserer likningen:

Definisjon (Logistisk differensiallikning)

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

Løsning

$$P(t) = \frac{K}{1 + C e^{-kt}}$$



NTNU

Det skapende universitet

Kapittel 15.6.

Systemer av likninger og faseplan

Generelt system av differensiallikninger

Et (autonomt) system av difflikninger:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}$$

Løsninger er funksjoner av t .

$$x(t) \text{ og } y(t)$$

Altså en kurve i planet, (kalles en **bane** til systemet.)

Planet kalles for faseplanet.



NTNU

Det skapende universitet

Likevekts punkter.

Definition

Et likevektspunkt er der de deriverte er null.

- Stabile likevektspunkter
- Ustabile likevektspunkter

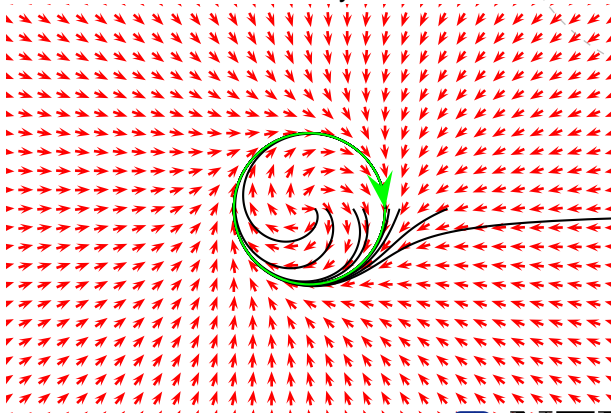


NTNU

Det skapende universitet

Retningsfelt i faseplanet, stabile løsninger

Grense sykel.



$$\begin{aligned} dx/dt &= y + x - x(x^2 + y^2) \\ dy/dt &= -x + y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$



NTNU

Det skapende universitet