



# NTNU

Det skapende universitet

## **Differensiallikninger** **Forelesning i Matematikk 1 TMA4100**

Hans Jakob Rivertz  
Institutt for matematiske fag  
18. november 2011

# Kapittel 15.3.

## Anvendelser



**NTNU**

Det skapende universitet

# Relativ vekstrate

## Eksempel (Befolkningsvekst)

Vi har allerede sett på likningen

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P$$

denne har løsning  $P(t) = P_0 e^{k \cdot t}$

## Definisjon

Størrelsen  $k$  i likningen over

$$k = \frac{dP/dt}{P}$$

kalles for **relativ vekstrate**.



**NTNU**

Det skapende universitet

# Fallskjermhopper i frittfall

## Problem

En fallskjermhopper påvirkes av

- 1 Tyngdekraften  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$
- 2 Luftmotstand  $L \approx -0,004 v^2$

Modell:

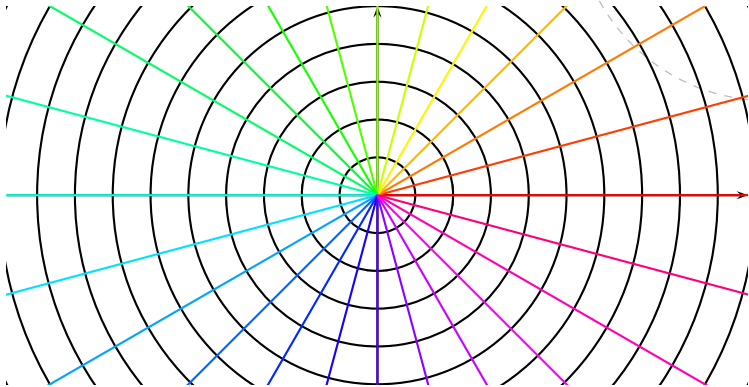
$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0,004 v^2, \quad v(0) = 0$$



**NTNU**

Det skapende universitet

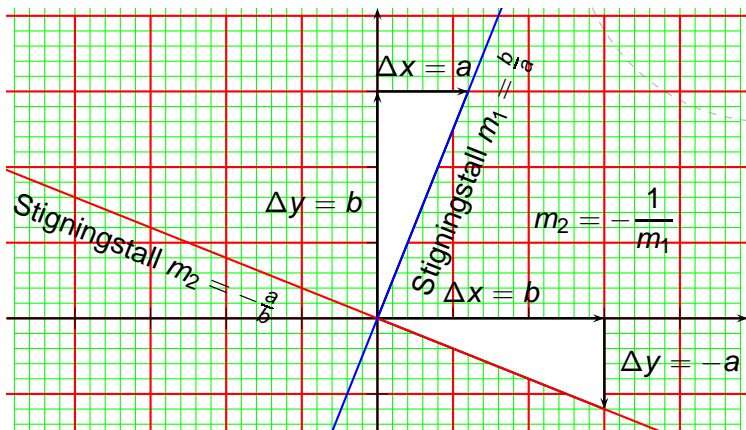
# Ortogonalale baner



**NTNU**

Det skapende universitet

# Ortogonale baners tangenter



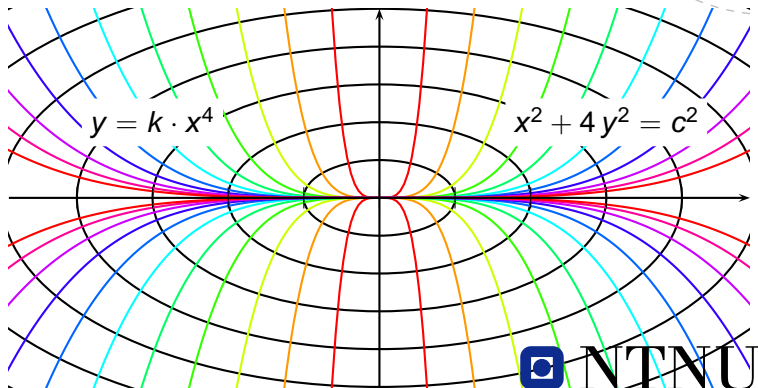
NTNU

Det skapende universitet

# Ortogonale baner til ellipser

## Problem

Hva er de ortogonale banene til ellipsene i figuren?



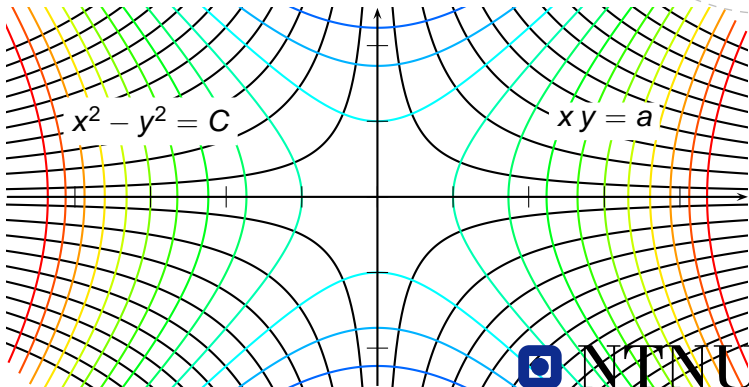
NTNU

Det skapende universitet

# Ortogonale baner til hyperbler

## Problem

Hva er de ortogonale banene til hyperblene i figuren?





# Kapittel 15.4.

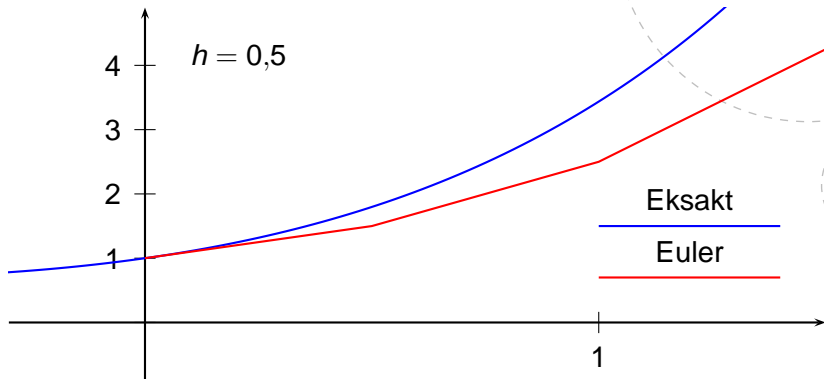
## Eulers metode



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eulers metode for $y' = x + y$



Figur: Eulers metode på  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eulers metode (Tilnærming skjer ved rette linjer.)

- Vi benytter oss av ideen fra retningsfelt.
- Likning

$$y' = f(x, y).$$

- Vi vil finne løsingen med startvedi  $y(x_0) = y_0$
- Finner verdiene i punktene  $x_i = x_0 + i \cdot h, i = 0, 1, 2, \dots, n$
- $h$  kalles **steglengde**
- Starter med  $y = y_0$
- Fortsetter med  $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$



NTNU

Det skapende universitet

# Eulers metode

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eksempel. Eulers metode for $y' = x + y$ , $y(0) = 1$

$$h = 0,2$$

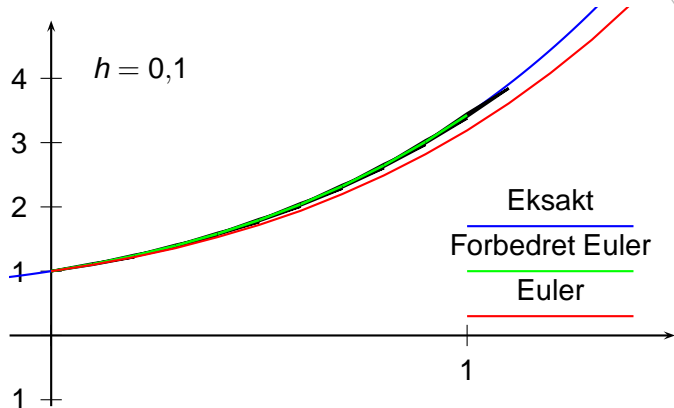
$n$	$x_n$	$y_n$	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n$
0	0,0000	1,0000	1,0000
1	0,2000	1,2000	1,4000
2	0,4000	1,4800	1,8800
3	0,6000	1,8560	2,4560
4	0,8000	2,3472	3,1472
5	1,0000	2,9766	3,9766



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eulers forbedrede metode for $y' = x + y$



Figur: Eulers forbedrede metode på  $y' = x + y, y(0) = 1$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eulers forbedrede metode

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$z_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left( \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})}{2} \right)$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Kapittel 15.5.

## Grafisk løsning av autonome likninger



# Autonom differensiallikning

$$\frac{dy}{dx} = F(y)$$

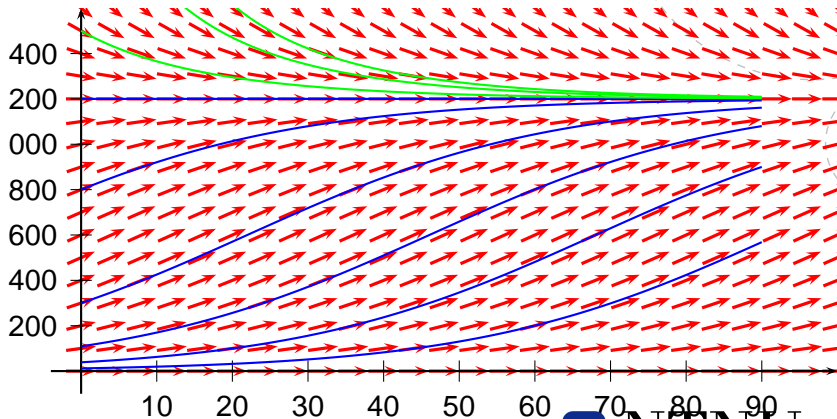


**NTNU**

Det skapende universitet

# Retningsvektorfelt logistisk modell

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P(1 - P/1200)$$



Figur: Retningsfelt med skisse av løsningskurvene