NTNU
Det skapende universitet

Differensiallikninger
Forelesning i Matematikk 1 TMA4100

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag
18. november 2011

Kapittel 15.3.
Anvendelser

Relativ vekstrate

Eksempel (Befolkningsvekst)

Vi har allerede sett på likningen

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P$$

denne har løsning $P(t) = P_0\, e^{k \cdot t}$

Definisjon

Størrelsen k i likningen over

$$k = \frac{dP/dt}{P}$$

kalles for **relativ vekstrate**.

Fallskjermhopper i frittfall

Problem

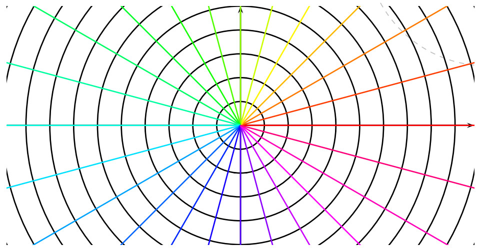
En fallskjermhopper påvirkes av

1. *Tyngdekraften* $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$
2. *Luftmotstand* $L \approx -0{,}004\, v^2$

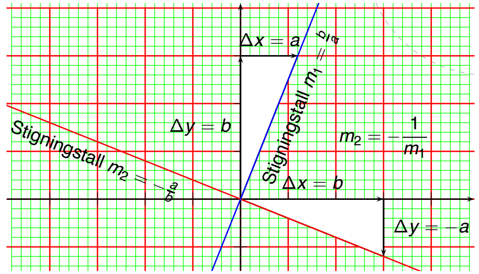
Modell:

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0{,}004\, v^2, \quad v(0) = 0$$

Ortogonale baner



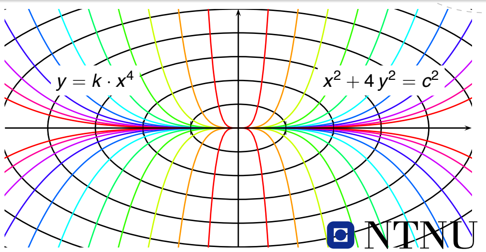
Ortogonale baners tangenter



Ortogonale baner til ellipser

Problem

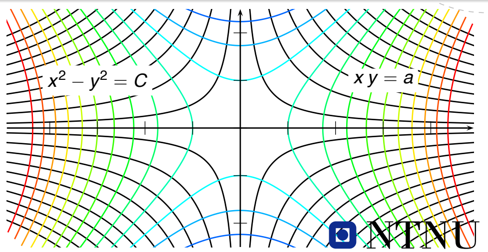
Hva er de ortogonale banene til ellipsene i figuren?



Ortogonale baner til hyperbler

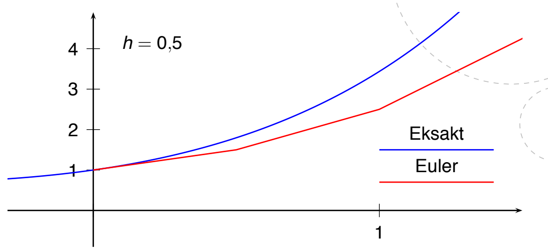
Problem

Hva er de ortogonale banene til hyperblene i figuren?



Kapittel 15.4.
Eulers metode

Eulers metode for $y' = x + y$



Figur: Eulers metode på $y' = x + y$, $y(0) = 1$

Eulers metode (Tilnærming skjer ved rette linjer.)

- Vi benytter oss av ideen fra retningsfelt.
- Likning
$$y' = f(x, y).$$
- Vi vil finne løsingen med startvedi $y(x_0) = y_0$
- Finner verdiene i punktene $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
- h kalles **steglengde**
- Starter med $y = y_0$
- Fortsetter med $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$

Eulers metode

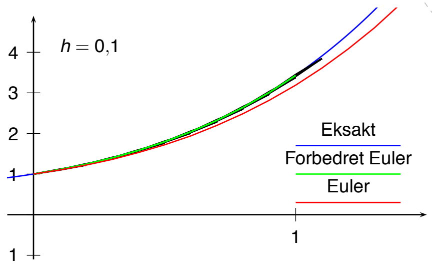
$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Eksempel. Eulers metode for $y' = x + y$, $y(0) = 1$

$h = 0{,}2$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n$
0	0,0000	1,0000	1,0000
1	0,2000	1,2000	1,4000
2	0,4000	1,4800	1,8800
3	0,6000	1,8560	2,4560
4	0,8000	2,3472	3,1472
5	1,0000	2,9766	3,9766

Eulers forbedrede metode for $y' = x + y$



Figur: Eulers forbedrede metode på $y' = x + y$, $y(0) = 1$

Eulers forbedrede metode

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$z_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})}{2} \right)$$

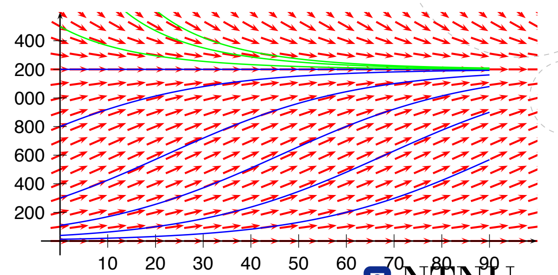
Kapittel 15.5.

Grafisk løsning av autonome likninger

Autonom differensiallikning

$$\frac{dy}{dx} = F(y)$$

Retningsvektorfelt logistisk modell $\frac{dP}{dt} = 0.05P(1 - P/1200)$



Figur: Retningsfelt med skisse av løsningskurvene